HỆ PHƯƠNG TRÌNH (Phần I)

1. $\begin{cases} 2^x - 2^y = (y-x)(xy+2) \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} \ln(1+x) - \ln(1+y) = x - y \\ x^2 - 12xy + 20y^2 = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^3 - y^3 + 6y^2 - 3x - 9y + 2 = 0 \\ \log_2 \dfrac{\sqrt{1-x^2}+1}{y^2 - 4y + 5} + \log_2 \dfrac{x^2}{2 + \sqrt{4y - y^2 - 3}} + 2 = 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 2x + 2} = 3^{y-1} + 1 \\ y + \sqrt{y^2 - 2y + 2} = 3^{x-1} + 1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} e^{y^2 - x^2} = \dfrac{x^2+1}{y^2+1} \\ 3\log_3(x+2y+6) = 2\log_2(x+y+2) + 1 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x + y^2 + \dfrac{8y\sqrt{x}}{\sqrt{x}+y} = 16 \\ \sqrt{\sqrt{x}+y} = x - y \end{cases}$

7. $\begin{cases} \sqrt{x+y+1} + \sqrt[3]{x+y} = 5 \\ \sqrt{x^2 + xy + 4} + \sqrt{y^2 + xy + 4} = 12 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x^2y + y^3 = 2x^4 + x^6 \\ (x+2)\sqrt{y+1} = (x+1)^2 \end{cases}$

9. $\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt[3]{y+6} = y^2 - 1 \\ \sqrt{y-1} + \sqrt[3]{x+6} = x^2 - 1 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x^4 + y^2 = \dfrac{698}{81} \\ x^2 + y^2 + xy - 3x - 4y + 4 = 0 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x^3(2+3y) = 1 \\ x(y^3 - 2) = 3 \end{cases}$

12. $\begin{cases} \left(1 + 4^{2x-y}\right).5^{1-2x+y} = 1 + 2^{2x-y+1} \\ y^3 + 4x + 1 + \ln(y^2 + 2x) = 0 \end{cases}$

13. $\begin{cases} \sqrt{7x+y} + \sqrt{2x+y} = 5 \\ \sqrt{2x+y} + x - y = 2 \end{cases}$

14. $\begin{cases} xy - 3x - 2y = 16 \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y = 33 \end{cases}$

15. $\begin{cases} (2x+y)^2 - 5(4x^2 - y^2) + 6(2x-y)^2 = 0 \\ 2x + y + \dfrac{1}{2x-y} = 3 \end{cases}$

16. $\begin{cases} x^2 + y^2 - 3x + 4y = 1 \\ 3x^2 - 2y^2 - 9x - 8y = 3 \end{cases}$

17. $\begin{cases} x\sqrt{x} - \sqrt{x} = y\sqrt{y} + 8\sqrt{y} \\ x - y = 5 \end{cases}$

18. $\begin{cases} x^2 + xy - y^2 = 5 \\ \dfrac{y}{x} - 2\dfrac{x}{y} = -\dfrac{5}{2} - \dfrac{2}{xy} \end{cases}$

19. $\begin{cases} 2y(x^2 - y^2) = 3x \\ x(x^2 + y^2) = 10y \end{cases}$

20. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{6x}{x+y}} + \sqrt{\dfrac{x+y}{6x}} = \dfrac{5}{2} \\ x + y - xy = 9 \end{cases}$

21. $\begin{cases} x^3 + 5y = y^3 + 5x \\ x^4 + y^2 = 1 \end{cases}$

22. $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt[4]{32-x} - y^2 = -3 \\ \sqrt[4]{x} + \sqrt{32-x} + 6y = 24 \end{cases}$

23. $\begin{cases} x^2(y+1)(x+y+1) = 3x^2 - 4x + 1 \\ xy + x + 1 = x^2 \end{cases}$

24. $\begin{cases} y + xy^2 = 6x^2 \\ 1 + x^2y^2 = 5x^2 \end{cases}$

25. $\begin{cases} y^2=(5x+4)(4-x) \\ y^2-5x^2-4xy+16x-8y+16=0 \end{cases}$

26. $\begin{cases} x^2+1+y(x+y)=4y \\ (x^2+1)(x+y-2)=y \end{cases}$

27. $\begin{cases} 2x^3-9y^3=(x-y)(2xy+3) \\ x^2-xy+y^2=3 \end{cases}$

28. $\begin{cases} 4xy+4(y^2+x^2)+\dfrac{3}{(x+y)^2}=7 \\ 2x+\dfrac{1}{x+y}=3 \end{cases}$

29. $\begin{cases} \sqrt{2y}\left(3-\dfrac{5}{y+42x}\right)=4 \\ \sqrt{x}\left(3-\dfrac{5}{y+42x}\right)=2 \end{cases}$

30. $\begin{cases} x+\dfrac{2xy}{\sqrt[3]{x^2-2x+9}}=x^2+y \\ y+\dfrac{2xy}{\sqrt[3]{y^2-2y+9}}=y^2+x \end{cases}$

31. $\begin{cases} y=-x^3+3x+4 \\ x=2y^3-6y-2 \end{cases}$

32. $\begin{cases} x-y=e^x-e^y \\ \log_2^2 x+3\log_{\frac{1}{2}} y=-2 \end{cases}$

33. $\begin{cases} x^3+1=2(x^2-x+y) \\ y^3+1=2(y^2-y+x) \end{cases}$

34. $\begin{cases} \left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1 \\ y+\dfrac{y}{\sqrt{x^2-1}}+\dfrac{35}{12}=0 \end{cases}$

35. $\begin{cases} x^2+3y=9 \\ y^4+4(2x-3)y^2-48y-48x+155=0 \end{cases}$

36. $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 125y^5-125y^3+6\sqrt{15}=0 \end{cases}$

37. $\begin{cases} x^3-xy^2+2000y=0 \\ y^3-yx^2-500x=0 \end{cases}$

38. $\begin{cases} x^2y^2-2x+y^2=0 \\ 2x^2-4x+3+y^3=0 \end{cases}$

39. $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1+2x^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+2y^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{1+2xy}} \\ \sqrt{x(1-2x)}+\sqrt{y(1-2y)}=\dfrac{2}{9} \end{cases}$

40. $\begin{cases} (3-x)\sqrt{2-x}-2y\sqrt{2y-1}=0 \\ 2\sqrt{2-x}-\sqrt{(2y-1)^3}=1 \end{cases}$

41. $\begin{cases} x^3-y^3=9 \\ x^2+2y^2-x+4y=0 \end{cases}$

42. $\begin{cases} x^3-8x=y^3+2y \\ x^2-3=3(y^2+1) \end{cases}$

43. $\begin{cases} 2x^2y+3xy=4x^2+9y \\ 7y+6=2x^2+9x \end{cases}$

44. $\begin{cases} x^4-x^3y+x^2y^2=1 \\ x^3y-x^2+xy=1 \end{cases}$

45. $\begin{cases} x^4-4x^2+y^2-6y+9=0 \\ x^2y+x^2+2y-22=0 \end{cases}$

46. $\begin{cases} 8x^3y^3+27=18y^3 \\ 4x^2y+6x=y^2 \end{cases}$

47. $\begin{cases} x^2+y^2-xy=3 \\ \sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}=4 \end{cases}$

48. $\begin{cases} e^{x-y}+e^{x+y}=2(x+1) \\ e^{x+y}=x-y+1 \end{cases}$

49. $\begin{cases} \left(1+4^{x-y}\right).5^{1-x+y}=1+3^{x-y+2} \\ x^2-3y\sqrt{y-\dfrac{1}{x}}=1-2y \end{cases}$

50. $\begin{cases} 2+6y=\dfrac{x}{y}-\sqrt{x-2y} \\ \sqrt{x+\sqrt{x-2y}}=x+3y-2 \end{cases}$

51. $\begin{cases} 2x^2+x-\dfrac{1}{y}=2 \\ y-y^2x-2y^2=-2 \end{cases}$

52. $\begin{cases} y\sqrt{x^2-y^2}=12 \\ x+y+\sqrt{x^2-y^2}=12 \end{cases}$

53. $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=2\sqrt{y} \\ \sqrt{x}+\sqrt{5y}=3 \end{cases}$

54. $\begin{cases} x^2+y^2+xy+1=4y \\ y\left(x+y\right)^2=2x^2+7y+2 \end{cases}$

55. $\begin{cases} 2y^2-x^2=1 \\ 2x^3-y^3=2y-x \end{cases}$

56. $\begin{cases} x^2+\sqrt{x}=2y \\ y^2+\sqrt{y}=2x \end{cases}$

57. $\begin{cases} \left(4x^2+1\right)x+\left(y-3\right)\sqrt{5-2y}=0 \\ 4x^2+y^2+2\sqrt{3-4x}=7 \end{cases}$

58. $\begin{cases} 2x^2y+3xy=4x^2+9y \\ 7y+6=2x^2+9x \end{cases}$

59. $\begin{cases} x^3+8y^3-4xy^2=1 \\ 2x^4+8y^4-2x-y=0 \end{cases}$

60. $\begin{cases} y+xy^2=-6x^2 \\ 1+x^3y^3=19x^3 \end{cases}$

61. $\begin{cases} 2\left(2x+1\right)^3+2x+1=\left(2y-3\right)\sqrt{y-2} \\ \sqrt{4x+2}+\sqrt{2y+4}=6 \end{cases}$

62. $\begin{cases} x^2+y^2+1+xy=y \\ x+y-2=\dfrac{y}{x^2+1} \end{cases}$

63. $\begin{cases} x^4+x^3y+9y=y^3x+x^2y^2+9x \\ x\left(y^2-x^2\right)=7 \end{cases}$

64. $\begin{cases} x^3-y^3=35 \\ 2x^2+3y^2=4x-9y \end{cases}$

65. $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{2\sqrt{x}}{y}+2 \\ y\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)=\sqrt{3x^2+3} \end{cases}$

66. $\begin{cases} \left(1-\dfrac{12}{y+3x}\right)\sqrt{x}=2 \\ \left(1+\dfrac{12}{y+3x}\right)\sqrt{y}=6 \end{cases}$

67. $\begin{cases} x+\dfrac{x+3y}{x^2+y^2}=3 \\ y-\dfrac{y-3x}{x^2+y^2}=0 \end{cases}$

68. $\begin{cases} x^4-4x+2^{xy-2x+4}=5 \\ 2^x-2^y=y^3-x^3 \end{cases}$

69. $\begin{cases} x^{11}+xy^{10}=y^{22}+y^{12} \\ 6y^4+3x+2=2y^4.\sqrt[3]{x\left(5x^2+2x+8\right)} \end{cases}$

70. $\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{1}{5} \\ 4x^2+3x-\dfrac{57}{25}=-y\left(3x+1\right) \end{cases}$

71. $\begin{cases} \sqrt{2x}+2\sqrt[4]{6-x}-y^2=2\sqrt{2} \\ \sqrt[4]{2x}+2\sqrt{6-x}+2\sqrt{2}y=8+\sqrt{2} \end{cases}$

72. $\begin{cases} x^2y^2-2x+y^2=0 \\ 2x^2-4x+3+y^3=0 \end{cases}$

73. $\begin{cases} x^4 - y^4 = 240 \\ x^3 - 2y^3 = 3\left(x^2 - 4y^2\right) - 4\left(x - 8y\right) \end{cases}$

74. $\begin{cases} y^3 + y = x^3 + 3x^2 + 4x + 2 \\ \sqrt{1 - x^2} - \sqrt{y} = \sqrt{2 - y} - 1 \end{cases}$

75. $\begin{cases} 2\left(x^3 + 2x - y - 1\right) = x^2\left(y + 1\right) \\ y^3 + 4x + 1 + \ln\left(y^2 + 2x\right) = 0 \end{cases}$

76. $\begin{cases} x^3 + 2y^2 = x^2 y + 2xy \\ 2\sqrt{x^2 - 2y - 1} + \sqrt[3]{y^3 - 14} = x - 2 \end{cases}$

77. $\begin{cases} x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2} = 1 \\ \left(1 - x\right)\left(1 + y\right) = 2 \end{cases}$

78. $\begin{cases} x^4 + 2x^3 y + x^2 y^2 = 2x + 9 \\ x^2 + 2xy = 6x + 6 \end{cases}$

79. $\begin{cases} \left(2x^2 - 1\right)\left(2y^2 - 1\right) = \dfrac{7xy}{2} \\ x^2 + y^2 + xy - 7x - 6y + 14 = 0 \end{cases}$

80. $\begin{cases} x - y = \cos x - \cos y \\ x^2 y - 3y - 18 = 0 \end{cases}$

81. $\begin{cases} x^2 y + y + xy^2 + x = 18xy \\ x^4 y^2 + y^2 + x^2 y^4 + x^2 = 208x^2 y^2 \end{cases}$

82. $\begin{cases} \sqrt{xy} + \sqrt{1 - y} = \sqrt{y} \\ 2\sqrt{xy - y} - \sqrt{y} = -1 \end{cases}$

83. $\begin{cases} 4x^3 + 3xy^2 = 7y \\ y^3 + 6x^2 y = 7 \end{cases}$

84. $\begin{cases} x^3 + 3xy^2 = -49 \\ x^2 - 8xy + y^2 = 8x - 17y \end{cases}$

85. $\begin{cases} x^3 + 2xy^2 + 12y = 0 \\ 8y^2 + x^2 = 12 \end{cases}$

86. $\begin{cases} y^3 + y^2 x + 3x - 6y = 0 \\ x^2 + xy = 3 \end{cases}$

87. $\begin{cases} x^3 + y^3 - xy^2 = 1 \\ 4x^4 + y^4 = 4x + y \end{cases}$

88. $\begin{cases} 27x^3 y^3 + 125 = 9y^3 \\ 45x^2 y + 75x = 6y^2 \end{cases}$

89. $\begin{cases} x^4 + y^4 = 2 \\ x^3 - 2x^2 + 2x = y^2 \end{cases}$

90. $\begin{cases} x^2 - 2xy + x + y = 0 \\ x^4 - 4x^2 y + 3x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$

91. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{2}} + \sqrt{\dfrac{x^2 + xy + y^2}{3}} = x + y \\ x\sqrt{2xy + 5x + 3} = 4xy - 5x - 3 \end{cases}$

92. $\begin{cases} x^2 + y^2 + \dfrac{2xy}{x + y} = 1 \\ \sqrt{x + y} = x^2 - y \end{cases}$

93. $\begin{cases} xy\left(5 - 3y + 2xy\right) = 4 + 3y \\ \left(y + \dfrac{1}{x}\right)^2 - 5xy + 4 = 0 \end{cases}$

94. $\begin{cases} x^2 + y + x^3 y + xy^2 + xy = \dfrac{-5}{4} \\ x^4 + y^2 + xy\left(1 + 2x\right) = \dfrac{-5}{4} \end{cases}$

95. $\begin{cases} 3 - \left(y + 1\right)^2 = \sqrt{x - y} \\ x + 8y = \sqrt{x - y - 9} \end{cases}$

96. $\begin{cases} 5x^2 y - 4xy^2 + 3y^3 - 2\left(x + y\right) = 0 \\ xy\left(x^2 + y^2\right) + 2 = \left(x + y\right)^2 \end{cases}$

97. $\begin{cases} \sqrt{x - y} = 9 - \left|x + 2y\right| \\ x\left(x + 4y - 2\right) + y\left(4y + 2\right) = 41 \end{cases}$

98. $\begin{cases} \sqrt{x + y} + x\left(x + y\right) = \sqrt{2y} + 2y^2 \\ \sqrt{x^2 + 4y - 3} + 1 = \sqrt{3x - 2} + y \end{cases}$

99. $\begin{cases} 2x^2 - x\left(y - 1\right) + y^2 = 3y \\ x\left(x - 1\right) + y\left(x + 2\right) - 3y^2 = 0 \end{cases}$

100. $\begin{cases} xy = x + 7y + 1 \\ x^2 y^2 = 10y^2 - 1 \end{cases}$

CÁC BÀI GIẢI

Bài 1. Ta có:

$$\begin{cases} 2^x - 2^y = (y-x)(xy+2) \\ x^2+y^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=2 \\ 2^x-2^y=(y-x)(xy+x^2+y^2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=2 \\ 2^x-2^y=y^3-x^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=2 \\ 2^x+x^3=2^y+y^3 \end{cases}$$

Xét hàm số $f(t)=2^t+t^3$ trên $\mathbb{R}$. Ta có: $f'(t)=2^t.\ln 2+3t^2>0 \quad \forall\ t\in\mathbb{R}$ nên $f(t)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$. Vậy $2^x+x^3=2^y+y^3 \Leftrightarrow x=y$.

Lúc này, hệ trở thành: $\begin{cases} x=y \\ x^2+y^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=1 \\ x=y=-1 \end{array}\right.$

Vậy hệ có các nghiệm là $\boxed{(x;y)=(1;1),(-1;-1)}$

Bài 2: Điều kiện $x,y>-1$. Ta có:

$$\begin{cases} \ln(1+x)-\ln(1+y)=x-y \\ x^2-12xy+20y^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2y)(x-10y)=0 \\ \ln(1+x)-\ln(1+y)=x-y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2y \ \vee \ x=10y \\ \ln(1+x)-x=\ln(1+y)-y \end{cases}$$

Dễ thấy rằng x,y cùng dấu. Xét hàm số $f(t)=\ln(1+t)-t$ trên $[-1;+\infty)$.

Đạo hàm: $f'(t)=\dfrac{1}{1+t}-1=\dfrac{-t}{1+t}$. Ta có: $f'(t)=0\Leftrightarrow t=0$. Vậy hàm số đồng biến trên $(-1;0)$ và nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

+) Nếu x,y cùng âm (tức là cùng thuộc $(-1;0)$) thì theo tính chất của hàm số $f(t)$, ta có: $x=y$. Thay vào hệ giải được nghiệm $x=y=0$ (loại).

+) Nếu x,y cùng dương, tương tự ta cũng loại nốt.

+) $x=y=0$ thoả mãn hệ.

Vậy nghiệm của hệ là $\boxed{(x;y)=(0;0)}$

Bài 3: *Nhận xét:* Chắc chắn không thể sử dụng phép thế hay đánh giá. Nhận thấy phương trình thứ nhất của hệ chứa các hàm riêng biệt với x,y (chứa x^3,x và y^3, y^2, y *mà không chứa* xy) nên ta có thể đưa phương trình thứ nhất về cùng một hàm số rồi sử dụng đạo hàm để giải.

Điều kiện $x\in[-1;1]$, $y\in[1;3]$. Từ đó suy ra: $(x-1)\in[-2;0]$ và $(y-3)\in[-2;0]$.

Khai thác phương trình thứ nhất của hệ:

$$x^3-y^3+6y^2-3x-9y+2=0\Leftrightarrow x^3-3x+2=y^3-6y^2+9y\Leftrightarrow(x+2)(x-1)^2=y(y-3)^2$$

$$\Leftrightarrow\left[(x-1)+3\right](x-1)^2=\left[(y-3)+3\right](y-3)^2.$$

Xét hàm số $f(t)=(t+3)t^2=t^3+3t^2$ trên $[-2;0]$. Đạo hàm: $f'(t)=3t^2+6t=3t(t+2)$.

Ta có: $f'(t)=0\Leftrightarrow t=0 \ \vee \ t=-2$. Vậy trên đoạn $[-2;0]$, hàm số $f(t)$ đơn điệu.

Vậy, phương trình thứ nhất của hệ tương đương với $x-1=y-3\Leftrightarrow y=x+2$.

Thay vào phương trình thứ hai, ta có:

$$\log_2\frac{\sqrt{1-x^2}+1}{y^2-4y+5}+\log_2\frac{x^2}{2+\sqrt{4y-y^2-3}}+2=0$$

$$\Leftrightarrow \log_2\frac{x^2\left(\sqrt{1-x^2}+1\right)}{\left(y^2-4y+5\right)\left(2+\sqrt{4y-y^2-3}\right)}=-2$$

$$\Leftrightarrow \log_2\frac{x^2\left(\sqrt{1-x^2}+1\right)}{\left[(x+2)^2-4(x+2)+5\right]\left[2+\sqrt{4(x+2)-(x+2)^2-3}\right]}=-2$$

$$\Leftrightarrow \log_2\frac{x^2\left(\sqrt{1-x^2}+1\right)}{\left(x^2+1\right)\left(2+\sqrt{1-x^2}\right)}=-2\Leftrightarrow \frac{x^2\left(\sqrt{1-x^2}+1\right)}{\left(x^2+1\right)\left(2+\sqrt{1-x^2}\right)}=\frac{1}{4}\quad (*)$$

Đặt $\sqrt{1-x^2}=t\quad \left(t\in[0;1]\right)$. Lúc này $(*)$ trở thành:

$$\frac{\left(1-t^2\right)(t+1)}{\left(2-t^2\right)(2+t)}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow 4\left(-t^3-t^2+t+1\right)=-t^3-2t^2+2t+4\Leftrightarrow 3t^3+2t^2-2t=0$$

$\Leftrightarrow t\left(3t^2+2t-2\right)=0\Leftrightarrow t=0 \ \vee \ t=\frac{-1+\sqrt{7}}{3}$ (do điều kiện nên đã loại nghiệm $t=\frac{-1-\sqrt{7}}{3}$)

+) $t=0\Rightarrow 1-x^2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\Rightarrow y=3\\ x=-1\Rightarrow y=1\end{array}\right.$

+) $t=\frac{-1+\sqrt{7}}{3}\Rightarrow x^2=\frac{1+2\sqrt{7}}{9}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\sqrt{1+2\sqrt{7}}}{3}\Rightarrow y=\frac{\sqrt{1+2\sqrt{7}}}{3}+2\\ x=-\frac{\sqrt{1+2\sqrt{7}}}{3}\Rightarrow y=2-\frac{\sqrt{1+2\sqrt{7}}}{3}\end{array}\right.$

Nghiệm: $\boxed{(x,y)=(1;3),(-1;1),\left(\frac{\sqrt{1+2\sqrt{7}}}{3};\frac{\sqrt{1+2\sqrt{7}}}{3}+2\right),\left(-\frac{\sqrt{1+2\sqrt{7}}}{3};2-\frac{\sqrt{1+2\sqrt{7}}}{3}\right)}$

Bài 4: ***Phân tích:*** Hệ chứa ẩn là hàm hữu tỉ và hàm số mũ, chúng có tính chất khác nhau nên *chắc chắn* sẽ phải sử dụng đạo hàm. Và cũng lưu ý luôn, những hệ chứa hàm có tính chất khác nhau thì gần như 90% sử dụng đạo hàm hoặc phương pháp đánh giá.

Cộng chéo vế theo vế và giữ một phương trình của hệ ta được hệ tương đương:

$$\begin{cases} 3^{x-1}+(x-1)+\sqrt{(x-1)^2+1}=3^{y-1}+(y-1)+\sqrt{(y-1)^2+1}\ (*)\\ x+\sqrt{x^2-2x+2}=3^{y-1}+1\end{cases}$$

Xét hàm số $f(t)=3^t+t+\sqrt{t^2+1}$ trên $\mathbb{R}$.

Hàm số có đạo hàm: $f'(t)=3^t.\ln 3+1+\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}=3^t.\ln 3+\frac{\sqrt{t^2+1}+t}{\sqrt{t^2+1}}$.

Ta có: $\sqrt{t^2+1} > \sqrt{t^2} = |t| \Rightarrow \sqrt{t^2+1} + t > |t| + t \ge 0$. Từ đây suy ra $f'(t) > 0 \ \forall \ t \in \mathbb{R}$.
Vậy, $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Ta thấy phương trình $(*)$ có dạng $f(x-1) = f(y-1)$. Từ đó suy ra $x-1 = y-1 \Leftrightarrow x = y$. Lúc này hệ sẽ tương đương với:

$$\begin{cases} x = y \\ x + \sqrt{(x-1)^2+1} = 3^{x-1}+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \ln\left((x-1) + \sqrt{(x-1)^2+1}\right) = (x-1).\ln 3 \quad (\blacktriangle) \end{cases}$$

Lại tiếp tục xét hàm số $g(t) = \ln\left(t + \sqrt{t^2+1}\right) - t\ln 3$ trên $\mathbb{R}$.

Hàm số này có đạo hàm $g'(t) = \dfrac{1 + \dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}}{t + \sqrt{t^2+1}} - \ln 3 = \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}} - \ln 3$.

Dễ thấy $\ln 3 > 1 \ge \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ nên $g'(t) < 0 \ \vee \ t \in \mathbb{R}$. Như vậy hàm số $g(t)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
Mặt khác ta lại có $g(0) = 0$ nên phương trình $(\blacktriangle)$ có nghiệm duy nhất là $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
Vậy nghiệm của hệ là $\boxed{(x;y) = (1;1)}$

<u>Bài 5:</u> Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với: $(x^2+1)e^{x^2} = (y^2+1)e^{y^2}$

Xét hàm số $f(t) = (t+1)e^t$ trên $[0;+\infty)$.
Hàm số có đạo hàm $f'(t) = e^t + e^t(t+1) > 0 \ \forall \ t \in [0;+\infty)$.
Từ đó suy ra $f(t)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$. Vậy phương trình thứ nhất của hệ đã cho tương đương với: $x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = \pm y$.
+) Nếu $x = -y$. Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$3\log_3(y+6) = 1 + 2\log_2 2 = 3 \Leftrightarrow \log_3(y+6) = 1 \Leftrightarrow y + 6 = 3^1 \Leftrightarrow y = -3 \Rightarrow x = 3.$$

+) Nếu $x = y$. Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$3\log_3(3y+6) = 2\log_2(2y+2) + 1 \Leftrightarrow 3\left[1 + \log_3(y+2)\right] = 2\left[1 + \log_2(y+1)\right] + 1$$

$$\Leftrightarrow 3\log_3(y+2) = 2\log_2(y+1) \Leftrightarrow 3\log_3(y+2) - 2\log_2(y+1) = 0 \qquad (*).$$

Xét hàm số $g(t) = 3\log_3(t+2) - 2\log_2(t+1)$ trên $(-1;+\infty)$.

Hàm số này có đạo hàm: $g'(t) = \dfrac{3}{(t+2)\ln 3} - \dfrac{2}{(t+1)\ln 2}$.

Ta có: $\dfrac{3}{\ln 3} < \dfrac{2}{\ln 2} \Rightarrow \dfrac{3}{(t+2)\ln 3} < \dfrac{2}{(t+2)\ln 2}$ mà $\dfrac{2}{(t+2)\ln 2} < \dfrac{2}{(t+1)\ln 2}$ nên ta có:

$\dfrac{3}{(t+2)\ln 3} < \dfrac{2}{(t+1)\ln 2}$, tức là $g'(t) < 0$.

Như vậy nên hàm số nghịch biến trên $(-1;+\infty)$.
Ta lại có $g(7) = 0$. Vậy $(*)$ có nghiệm $y = 7 \Rightarrow x = 7$.
Vậy nghiệm của hệ phương trình là $\boxed{(x;y) = (7;7),(3;-3)}$
<u>Cách khác:</u> Trong trường hợp $x = y$, ta đặt $3\log_3(x+2) = 2\log_2(x+1) = 6u$ thì hệ trở thành:

$$\begin{cases} x+2=3^{2u} \\ x+1=2^{3u} \end{cases} \Rightarrow 1+2^{3u}=3^{2u} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{9}\right)^u+\left(\frac{8}{9}\right)^u=1$$

Ta lại thấy hàm số $h(u)=\left(\frac{1}{9}\right)^u+\left(\frac{8}{9}\right)^u$ là hàm nghịch biến mà $h(1)=1$ nên $u=1$ là nghiệm duy nhất của hệ $\Rightarrow x=y=7$.

Bài 6: Điều kiện: $x\ge 0;\ \sqrt{x}+y>0$.

Đi từ phương trình thứ hai của hệ: $\sqrt{\sqrt{x}+y}=x-y \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}+y\right)+\sqrt{\sqrt{x}+y}=x+\sqrt{x}$ (1)

Xét hàm số $f(t)=t^2+t$ trên $[0;+\infty)$. Đạohàm: $f'(t)=2t+1>0$ nên $f(t)$ đồng biến.

Mặt khác (1) có dạng $f\left(\sqrt{\sqrt{x}+y}\right)=f\left(\sqrt{x}\right)$ nên (1) $\Leftrightarrow \sqrt{\sqrt{x}+y}=\sqrt{x} \Leftrightarrow y=x-\sqrt{x}$.

Đặt $t=\sqrt{x}\ (t\ge 0)$ thì $y=t^2-t$. Thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta có:

$$t^2+\left(t^2-t\right)^2+\frac{8t\left(t^2-t\right)}{t^2}=16 \Leftrightarrow t^4-2t^3+2t^2+8t-24=0$$

$$\Leftrightarrow (t-2)\left(t^3+2t+12\right)=0 \Leftrightarrow t=2 \quad \left(\text{do } t^3+2t+12\ge 12\right).$$

Với $t=2 \Rightarrow x=4,\ y=2$.

Vậy nghiệm của hệ là $\boxed{(x;y)=(4;2)}$

Cách giải khác: Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$$\left[(x+y)^2-16\right]-\left(2xy-\frac{8xy}{x+y}\right)=0 \Leftrightarrow (x+y+4)(x+y-4)-\frac{2xy(x+y-4)}{x+y}=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y-4)\left(x+y+4-\frac{2xy}{x+y}\right)=0 \Leftrightarrow (x+y-4)\left(x^2+y^2+4x+4y\right)=0$$

Bài 7: Điều kiện: $x+y+1\ge 0$. Khai thác phương trình thứ nhất: $\sqrt{x+y+1}+\sqrt[3]{x+y}=5$ (1)

Ta đặt $t=\sqrt[3]{x+y}$ (điều kiện: $t\ge -1$) thì (1) trở thành: $\sqrt{t^3+1}+t=5$.

Dễ thấy rằng hàm số $f(t)=\sqrt{t^3+1}+t$ đồng biến trên $[-1;+\infty)$(vì khi t tăng thì $f(t)$ tăng). Như vậy phương trình với ẩn t trên sẽ có nhiều nhất một nghiệm. Nhận thấy $t=2$ là một nghiệm của phương trình.

Vậy, ta có: $t=2 \Rightarrow x+y=8$. Phương trình thứ hai của hệ tương đương với:

$$\sqrt{x(x+y)+4}+\sqrt{y(x+y)+4}=12 \Leftrightarrow \sqrt{8x+4}+\sqrt{8y+4}=12.$$

Hệ đã cho sẽ tương đương với hệ sau:

$$\begin{cases} x+y=8 \\ \sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=8 \\ 2x+2y+2+2\sqrt{(2x+1)(2y+1)}=36 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=8 \\ \sqrt{(2x+1)(2y+1)}=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=8 \\ 4xy+2(x+y)+1=81 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=8 \\ xy=16 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=4$$

Vậy nghiệm của hệ là $\boxed{(x;y)=(4;4)}$

Bài 8: Điều kiện $y \geq -1$. Hệ đã cho: $\begin{cases} 2x^2y + y^3 = 2x^4 + x^6 & (1) \\ (x+2)\sqrt{y+1} = (x+1)^2 & (2) \end{cases}$

Nếu $x = 0$ thì từ (1) suy ra $y = 0$, thay vào (2) không thỏa mãn $\Rightarrow x \neq 0$.

Chia hai vế của (1) cho $x^3 \neq 0$ ta có: $\dfrac{2y}{x} + \dfrac{y^3}{x^3} = 2x + x^3$ (3).

Xét hàm số $f(t) = 2t + t^3$ trên $\mathbb{R}$ có đạo hàm $f'(t) = 3t^2 + 2 > 0$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác (3) có dạng $f\left(\dfrac{y}{x}\right) = f(x) \Leftrightarrow \dfrac{y}{x} = x \Leftrightarrow y = x^2$. Thay vào (2), điều kiện $x \geq -2$:

$$(x+2)\sqrt{x^2+1} = (x+1)^2 \Leftrightarrow (x+2)^2(x^2+1) = (x+1)^4 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3} \Rightarrow y = 3$$

Vậy nghiệm của hệ là $\boxed{(x;y) = \left(\pm\sqrt{3};3\right)}$

Bài 9: Điều kiện $x, y \geq 1$. Hệ đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt[3]{y+6} = y^2 - 1 \\ \sqrt{y-1} + \sqrt[3]{x+6} = x^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow (\mathrm{I}) \begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt[3]{y+6} = y^2 - 1 \\ x^2 - \sqrt[3]{x+6} + \sqrt{x-1} = y^2 - \sqrt[3]{y+6} + \sqrt{y-1} \quad (1) \end{cases}$$

Xét hàm số $f(t) = t^2 - \sqrt[3]{t+6} + \sqrt{t-1}$ trên $[1;+\infty)$.

Hàm số có đạo hàm: $f'(t) = 2t - \dfrac{1}{3}(t+6)^{\frac{-2}{3}} + \dfrac{1}{2\sqrt{t-1}} = 2t - \dfrac{1}{3.\sqrt[3]{(t+6)^2}} + \dfrac{1}{2\sqrt{t-1}}$.

Ta sẽ chứng minh rằng $2t \geq \dfrac{1}{3.\sqrt[3]{(t+6)^2}}$. Thật vậy: $2t \geq \dfrac{1}{3.\sqrt[3]{(t+6)^2}} \Leftrightarrow 6t.\sqrt[3]{(t+6)^2} \geq 1$.

Điều này hiển nhiên đúng do t thuộc đoạn $[1;+\infty)$.

Như vậy, $f'(t) > 0 \;\; \forall\, t \in [1;+\infty) \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$. Vì đó: $(1) \Leftrightarrow x = y \geq 1$

$$(\mathrm{I}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \sqrt{x-1} + \sqrt[3]{x+6} = x^2 - 1 \quad (2) \end{cases}$$

Nhẩm được nghiệm của (2) là $x = 2$ nên ta dùng phương pháp nhân liên hợp:

$$(2) \Leftrightarrow (x^2 - 4) - \left(\sqrt{x-1} - 1\right) - \left(\sqrt[3]{x+6} - 2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x+2) - \frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1} - \frac{x-2}{\sqrt[3]{(x+6)^2} + 2.\sqrt[3]{x+6} + 4} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(x + 2 - \frac{1}{\sqrt{x-1}+1} - \frac{1}{\sqrt[3]{(x+6)^2} + 2.\sqrt[3]{x+6} + 4}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x + 2 - \dfrac{1}{\sqrt{x-1}+1} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{(x+6)^2} + 2.\sqrt[3]{x+6} + 4} = 0 \quad (3) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

(Dễ thấy phương trình (3) vô nghiệm do $\dfrac{-1}{\sqrt{x-1}+1}\ge -1$ và $\dfrac{-1}{\sqrt[3]{(x+6)^2}+2.\sqrt[3]{x+6}+4}\ge \dfrac{-1}{4}$)

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $\boxed{(x;y)=(2;2)}$

Bài 10: Xem phương trình thứ hai của hệ là phương trình bậc hai ẩn x, tham số y :

$$x^2+(y-3)x+y^2-4y+4=0$$

Phương trình này có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta_x\ge 0\Leftrightarrow (y-3)^2-4(y^2-4y+4)\ge 0\Leftrightarrow -3y^2+10y-7\ge 0$

$$\Leftrightarrow 1\le y\le \frac{7}{3}\Rightarrow 1\le y^2\le \frac{49}{9} \qquad (1)$$

Lại xem phương trình thứ hai là phương trình bậc hai ẩn y, tham số x :

$$y^2+(x-4)y+x^2-3x+4=0$$

Phương trình này có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta_y\ge 0\Leftrightarrow (x-4)^2-4(x^2-3x+4)\ge 0\Leftrightarrow -3x^2+4x\ge 0$

$$\Leftrightarrow 0\le x\le \frac{4}{3}\Rightarrow 0\le x^4\le \frac{256}{81} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $x^4+y^2\le \dfrac{49}{9}+\dfrac{256}{81}=\dfrac{697}{81}<\dfrac{698}{81}$, mâu thuẫn với phương trình thứ nhất.

Từ đó suy ra $\boxed{\text{hệ đã cho vô nghiệm}}$

Bài 11: Nhìn hệ số có $+2$ và -2 nên ta chia hai vế rồi cộng lại:

$$\begin{cases}2+3y=\dfrac{1}{x^3}\\ y^3-2=\dfrac{3}{x}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2+3y=\dfrac{1}{x^3} & (1)\\ y^3+3y=\left(\dfrac{1}{x}\right)^3+\dfrac{3}{x} & (2)\end{cases}$$

Xét hàm số $f(t)=t^3+3t$ trên $\mathbb{R}$. Đạo hàm: $f'(t)=3t^2+3>0\ \ \forall\ t\in\mathbb{R}$. Từ đó suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Điều này cũng có nghĩa là $(2)\Leftrightarrow y=\dfrac{1}{x}$.

Thay vào phương trình (1) ta được: $\quad y^3=2+3y\Leftrightarrow y^3-3y+2=0$

$$\Leftrightarrow (y-1)^2(y+2)=0\Leftrightarrow y=1\ \vee y=-2.$$

+) Với $y=1\Rightarrow \dfrac{1}{x}=1\Leftrightarrow x=1.$

+) Với $y=-2\Rightarrow \dfrac{1}{x}=-2\Leftrightarrow x=\dfrac{-1}{2}.$

Vậy nghiệm của hệ là $\boxed{(x;y)=(1;1),\left(\dfrac{-1}{2};-2\right)}$

Bài 12: Đặt $t=2x-y$ thì phương trình thứ nhất trở thành: $5^{1-t}+5.\left(\dfrac{4}{5}\right)^t-1-2^t=0\quad (*)$

Xét hàm số $f(t)=5^{1-t}+5.\left(\dfrac{4}{5}\right)^t-1-2^t$ trên $\mathbb{R}$.

Hàm số có đạo hàm: $f'(t)=-5^{1-t}.\ln 5+5.\ln\dfrac{4}{5}.\left(\dfrac{4}{5}\right)^t-2^{t+1}.\ln 2$. Do $\ln 2>0,\ln 5>0,\ln\dfrac{4}{5}<0$ nên $f'(t)<0\ \ \forall\ t\in\mathbb{R}$. Mặt khác ta lại có $f(1)=0$ nên $(*)\Leftrightarrow t=1\Leftrightarrow 2x=y+1.$

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta có: $y^3+2y+3+\ln\left(y^2+y+1\right)=0$.

Tiếp tục xét hàm số $g(t)=t^3+2t+3+\ln\left(t^2+t+1\right)$ trên $\mathbb{R}$.

Hàm số này có đạo hàm $g'(t)=3t^2+2+\dfrac{2t+1}{t^2+t+1}=3t^2+\dfrac{2t^2+4t+2}{t^2+t+1}=3t^2+\dfrac{2(t+1)^2}{t^2+t+1}>0$ với mọi $t\in\mathbb{R}$ nên $g(t)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Mặt khác $g(-1)=0$ nên suy ra $y=-1$,

$\Rightarrow x=\dfrac{y+1}{2}=0$.

Vậy nghiệm của hệ là $\boxed{(x;y)=(0;-1)}$ (*Đề thi học sinh giỏi quốc gia 1998 – 1999*)

Bài 13: Điều kiện $7x+y\ge 0,\ 2x+y\ge 0$.

Đặt $a=\sqrt{7x+y}$, $b=\sqrt{2x+y}$ $(a,b\ge 0)$ $\Rightarrow \dfrac{3}{5}a^2-\dfrac{8}{5}b^2=x-y$. Hệ trở thành:

$$\begin{cases}a+b=5\\ b+\dfrac{3}{5}a^2-\dfrac{8}{5}b^2=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=5-b\\ b+\dfrac{3(5-b)^2}{5}-\dfrac{8b^2}{5}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=5-b\\ b^2+5b-13=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=5-b\\ b=\dfrac{-5\pm\sqrt{77}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=\dfrac{-5+\sqrt{77}}{2}\\ a=\dfrac{15-\sqrt{77}}{2}\end{cases}\text{(thoả mãn } a\ge 0)$$

(Ta đã loại nghiệm $b=\dfrac{-5-\sqrt{77}}{2}$ do điều kiện $b\ge 0$).

Ta lại có hệ sau: $$\begin{cases}7x+y=\left(\dfrac{15-\sqrt{77}}{2}\right)^2=\dfrac{151-15\sqrt{77}}{2}\\ 2x+y=\left(\dfrac{-5+\sqrt{77}}{2}\right)^2=\dfrac{51-5\sqrt{77}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=10-\sqrt{77}\\ y=\dfrac{11-\sqrt{77}}{2}\end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ đã cho là $\boxed{(x;y)=\left(10-\sqrt{77};\dfrac{11-\sqrt{77}}{2}\right)}$

Chú ý: Ngoài cách giải trên thì ta còn có một cách giải khá hay nữa, áp dụng được rộng rãi hơn cho nhiều bài toán hệ phương trình dạng này cũng như phương trình:

Ta có: $\sqrt{7x+y}+\sqrt{2x+y}=5\ (*)\Leftrightarrow\dfrac{(7x+y)-(2x+y)}{\sqrt{7x+y}-\sqrt{2x+y}}=5\Leftrightarrow\sqrt{7x+y}-\sqrt{2x+y}=x\ \ (**)$.

Lấy (*) trừ đi (**) ta được $2\sqrt{x+y}=5-x$. Đến đây ta thế vào phương trình thứ hai rồi rút x theo y để thế lại và giải phương trình ban đầu.

Bài 14: Biến đổi hệ như sau:

$$\begin{cases}xy-3x-2y=16\\ x^2+y^2-2x-4y=33\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(xy-2x-y+2)-(x-1)-(y-2)=21\\ (x-1)^2+(y-2)^2=38\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)(y-2)-(x-1)-(y-2)=21\\(x-1)^2+(y-2)^2=38\end{cases}\quad (\mathrm{I}).$$

Đặt $a=x-1$, $b=y-2$ thì hệ (I) trở thành:

$$\begin{cases}ab-a-b=21\\a^2+b^2=38\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}ab=21+(a+b)\\(a+b)^2-2ab=38\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}ab=21+(a+b)\\(a+b)^2-2(a+b)-80=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}ab=21+(a+b)\\\left[\begin{array}{l}a+b=10\\a+b=-8\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a+b=10\\ab=31\end{cases}\\\begin{cases}a+b=-8\\ab=13\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=-8\\ab=13\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=\sqrt{3}-4\\b=-\sqrt{3}-4\end{cases}\\\begin{cases}a=-\sqrt{3}-4\\b=\sqrt{3}-4\end{cases}\end{array}\right.$$

(Sở dĩ hệ $\begin{cases}a+b=10\\ab=31\end{cases}$ bị loại do $(a+b)^2=100<4ab=124$).

+) Với $a=\sqrt{3}-4$, $b=-\sqrt{3}-4$ thì $x=\sqrt{3}-3$, $y=-2-\sqrt{3}$.

+) Với $a=-\sqrt{3}-4$, $b=\sqrt{3}-4$ thì $x=-3-\sqrt{3}$, $y=\sqrt{3}-2$.

Vậy nghiệm của hệ là $\boxed{(x;y)=\left(\sqrt{3}-3;-2-\sqrt{3}\right),\left(-3-\sqrt{3};\sqrt{3}-2\right)}$

Cách giải khác: Cách 1: Lấy phương trình (1) nhân 2, sau đó cộng với phương trình (2) được hằng đẳng thức.

Cách 2: Có thể rút $x=\dfrac{16+2y}{y-3}$, thay vào phương trình thứ hai giải phương trình bậc 4.

Bài 15: Điều kiện: $2x-y\neq 0$. Với điều kiện này hệ tương đương với:

$$\begin{cases}(2x+y)^2-5(4x^2-y^2)+6(2x-y)^2=0\\2x+y+\dfrac{1}{2x-y}=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\dfrac{2x+y}{2x-y}\right)^2-5\left(\dfrac{2x+y}{2x-y}\right)+6=0\\2x+y+\dfrac{1}{2x-y}=3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{2x+y}{2x-y}=2\ \vee\ \dfrac{2x+y}{2x-y}=3\\2x+y+\dfrac{1}{2x-y}=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x=3y\ \vee\ x=y\\2x+y+\dfrac{1}{2x-y}=3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x=3y\\4y+\dfrac{1}{2y}=3\end{cases}\\\begin{cases}x=y\\3y+\dfrac{1}{y}=3\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x=3y\\8y^2-6y+1=0\end{cases}\\\begin{cases}x=y\\3y^2-3x+1=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{3y}{2}\\8y^2-6y+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{1}{2}\\x=\dfrac{3}{4}\end{cases}\vee\begin{cases}y=\dfrac{1}{4}\\x=\dfrac{3}{8}\end{cases}$$

(Dễ thấy phương trình $3x^2-3x+1=0$ có $\Delta<0$, vô nghiệm)

Vậy nghiệm của hệ là $\boxed{(x;y)=\left(\frac{3}{4};\frac{1}{2}\right),\left(\frac{3}{8};\frac{1}{4}\right)}$

Bài 16: Dễ dàng nhận thấy ẩn phụ:

$$\begin{cases} x^2+y^2-3x+4y=1 \\ 3x^2-2y^2-9x-8y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x^2-3x\right)+\left(y^2+4y\right)=1 \\ 3\left(x^2-3x\right)-2\left(y^2+4y\right)=3 \end{cases} \quad (\mathrm{I})$$

Đặt $a=x^2-3x$, $b=y^2+4y$ thì hệ (I) trở thành: $\begin{cases} a+b=1 \\ 3a-2b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases}$.

+) $a=1 \Leftrightarrow x^2-3x=1 \Leftrightarrow x^2-3x-1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}$.

+) $b=0 \Leftrightarrow y^2+4y=0 \Leftrightarrow y=0 \vee y=-4$.

Vậy hệ có 4 nghiệm $\boxed{(x;y)=\left(\frac{3\pm\sqrt{13}}{2};0\right),\left(\frac{3\pm\sqrt{13}}{2};-4\right)}$

Bài 17: Điều kiện $x,y\ge 0$. Đặt $a=\sqrt{x}$, $b=\sqrt{y}$ $(a>0;\ b\ge 0)$ thì hệ đã cho trở thành:

$$\begin{cases} a^3-a=b^3+8b \\ a^2-b^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2=5 \\ a^3-\dfrac{a\left(a^2-b^2\right)}{5}=b^3+\dfrac{8b\left(a^2-b^2\right)}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2=5 \\ 3b^3+ab^2-8a^2b+4a^3=0 \end{cases}$$

Do $a>0$ nên ta có thể chia hai vế của phương trình thứ hai cho a^3, ta được:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2=5 \\ 3\left(\dfrac{b}{a}\right)^3+\left(\dfrac{b}{a}\right)^2-8\left(\dfrac{b}{a}\right)+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2=5 \\ \left(\dfrac{b}{a}+2\right)\left(\dfrac{b}{a}-1\right)\left(\dfrac{3b}{a}-2\right)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2=5 \\ \dfrac{b}{a}=-2 \vee \dfrac{b}{a}=1 \vee \dfrac{b}{a}=\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2=5 \quad (1) \\ b=-2a \vee b=a \vee b=\dfrac{2}{3}a \end{cases}$$

+) Nếu $b=-2a$. Loại ngay do $a>0, b\ge 0$.

+) Nếu $b=a$. Lúc này $a^2-b^2=0$, trái với phương trình (1) (loại).

+) Nếu $b=\dfrac{2}{3}a$. Thay vào phương trình (1) ta được $\dfrac{5}{9}a^2=5 \Leftrightarrow a^2=9 \Rightarrow x=9$.

Lúc này $y=x-5=9-5=4$.

Vậy nghiệm của hệ là $\boxed{(x;y)=(9;4)}$

Bài 18: Điều kiện: $x,y\ne 0$. Biến đổi hệ về hệ đẳng cấp bậc hai:

$$\begin{cases} x^2+xy-y^2=5 \\ \dfrac{y}{x}-2\dfrac{x}{y}=-\dfrac{5}{2}-\dfrac{2}{xy} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+xy-y^2=5 \\ 2y^2-4x^2=-5xy-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2+4xy-4y^2=20 \\ 20x^2-25xy-10y^2=20 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16x^2-29xy-6y^2=0 \\ x^2+xy-y^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2y)(16x+3y)=0 \\ x^2+xy-y^2=5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2y \quad \vee \quad x=\dfrac{-3y}{16} \\ x^2+xy-y^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow (\mathrm{I})\begin{cases} x=2y \\ 5y^2=5 \end{cases} \vee \quad (\mathrm{II})\begin{cases} x=\dfrac{-3y}{16} \\ \dfrac{-5y^2}{8}=5 \end{cases}$$

Dễ thấy (II) vô lí. Giải hệ (I): $(\mathrm{I}) \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y \\ 5y^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=2 \end{cases} \vee \begin{cases} y=-1 \\ x=-2 \end{cases}$

Vậy nghiệm của hệ là $\boxed{(x;y)=(2;1),(-2;-1)}$

Bài 19: Nhận xét rằng $x=0$ khi và chỉ khi $y=0$. Vậy hệ có một nghiệm là $(0;0)$.

Trường hợp $x,y\neq 0$. Nhân chéo vế theo vế như sau:

$$\begin{cases} 2y(x^2-y^2)=3x \\ x(x^2+y^2)=10y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 20y^2(x^2-y^2)=3x^2(x^2+y^2) \\ 2y(x^2-y^2)=3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^4-17x^2y^2+20y^4=0 \\ 2y(x^2-y^2)=3x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2-4y^2)(3x^2-5y^2)=0 \\ 2y(x^2-y^2)=3x \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (\mathrm{I})\begin{cases} x^2-4y^2=0 \\ 2y(x^2-y^2)=3x \end{cases} \\ (\mathrm{II})\begin{cases} 3x^2-5y^2=0 \\ 2y(x^2-y^2)=3x \end{cases} \end{array}\right.$$

Giải hệ thứ nhất:

$$(\mathrm{I}) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=4y^2 \\ 2y(x^2-y^2)=3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y^3=x \\ x=\pm 2y \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2y \\ y^3=y \end{cases} \\ \begin{cases} x=-2y \\ y^3=-y \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y^2=1 \\ x=2y \end{cases} \\ \begin{cases} y^2=-1 \\ x=-2y \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=1 \\ x=2y \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=1 \\ x=2 \end{cases} \\ \begin{cases} y=-1 \\ x=-2 \end{cases} \end{array}\right.$$

Giải hệ thứ hai:

$$(\mathrm{II}) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=\dfrac{5}{3}y^2 \\ 2y(x^2-y^2)=3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=\dfrac{5}{3}y^2 \\ 4y^3=9x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm y\sqrt{\dfrac{5}{3}} \\ \dfrac{4y^3}{9}=x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y\sqrt{\dfrac{5}{3}} \\ \dfrac{4}{9}y^2=\sqrt{\dfrac{5}{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{3}{2}.\sqrt[4]{\dfrac{5}{3}} \\ x=\dfrac{3}{2}.\sqrt[4]{\dfrac{125}{27}} \end{cases} \vee \begin{cases} y=-\dfrac{3}{2}.\sqrt[4]{\dfrac{5}{3}} \\ x=-\dfrac{3}{2}.\sqrt[4]{\dfrac{125}{27}} \end{cases}$$ (Hơi tắt, giải hệ này không khó)

Vậy nghiệm của hệ là $\boxed{(x;y)=(0;0),(2;1),(-2;-1),\left(\dfrac{3}{2}.\sqrt[4]{\dfrac{125}{27}};\dfrac{3}{2}.\sqrt[4]{\dfrac{5}{3}}\right),\left(-\dfrac{3}{2}.\sqrt[4]{\dfrac{125}{27}};-\dfrac{3}{2}.\sqrt[4]{\dfrac{5}{3}}\right)}$

Bài 20: Điều kiện $x(x+y)>0$.

Đặt $a=\sqrt{\dfrac{6x}{x+y}}$ $(a>0)$ thì phương trình thứ nhất trở thành:

$$a+\frac{1}{a}=\frac{5}{2}\Leftrightarrow 2a^2-5a+2\Leftrightarrow a=2\ \vee\ a=\frac{1}{2}\text{ (thoả mãn).}$$

+) $a=2\Rightarrow\sqrt{\frac{6x}{x+y}}=2\Rightarrow x=2y$. Thay vào phương trình thứ hai, ta có:

$3y-2y^2=9\Leftrightarrow 2y^2-3y+9=0$, vô nghiệm do $\Delta=-63<0$.

+) $a=\frac{1}{2}\Rightarrow\sqrt{\frac{6x}{x+y}}=\frac{1}{2}\Rightarrow y=23x$. Thay vào phương trình thứ hai ta có:

$24x-23x^2=9\Leftrightarrow 23x^2-24x+9=0$, vô nghiệm do $\Delta'=-63<0$.

Vậy $\boxed{\text{hệ phương trình đã cho vô nghiệm}}$

Bài 21: Từ phương trình thứ hai của hệ, ta đánh giá được $x,y\in[-1;1]$. Ta có:

$$\begin{cases}x^3+5x=y^3+5y\\x^4+y^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(x^3-y^3\right)-5(x-y)=0\\x^4+y^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-y)\left(x^2+y^2-xy\right)-5(x+y)=0\\x^4+y^2=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-y)\left(x^2-xy+y^2-5\right)=0\\x^4+y^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\quad\left(\text{do } x,y\in[-1;1]\Rightarrow x^2+y^2-xy-5<0\right)\\x^4+y^2=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\x^4+x^2-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\x^2=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\x^2=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\x=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ là $\boxed{(x;y)=\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}};\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right),\left(-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}};-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right)}$

Bài 22: Điều kiện $0\le x\le 32$. Cộng vế theo vế hai phương trình của hệ đã cho, ta có:

$\sqrt{x}+\sqrt{32-x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{32-x}=y^2-6y+21$. Đánh giá hai vế của phương trình này như sau:

+) $\text{VP}=y^2-6y+21=(y-3)^2+12\ge 12\quad(1)$. Dấu bằng xảy ra khi $y=3$.

+) Đánh giá vế trái bằng bất đẳng thức Cauchy – Schwart (Bu–nhi–a–cốp–xki) như sau:

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{x}+\sqrt{32-x}\le\sqrt{\left(1^2+1^2\right)(x+32-x)}=8\\\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{32-x}\le\sqrt{\left(1^2+1^2\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{32-x}\right)}\le\sqrt{2.8}=4\end{array}\right\}\Rightarrow\text{VT}\le 12\quad(2)$$

Dấu bằng ở (2) xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}x\in[0;32]\\x=32-x\end{cases}\Leftrightarrow x=16$.

Từ $(1),(2)\Rightarrow\text{VT}=\text{VP}=12\Leftrightarrow x=16,\ \ y=3$.

Vậy nghiệm của hệ là $\boxed{(x;y)=(16;3)}$

Bài 23: Thay $x=0$ vào hệ thấy không thoả mãn $\Rightarrow x\ne 0$. Từ phương trình thứ hai của hệ ta rút: $y+1=\frac{x^2-1}{x}\quad(*)$.

Thế vào phương trình thứ nhất của hệ ta được:

$$x^2\left(\frac{x^2-1}{x}\right)\left(x+\frac{x^2-1}{x}\right)=3x^2-4x+1 \Leftrightarrow x^2.\frac{x^2-1}{x}.\frac{2x^2-1}{x}=3x^2-4x+1$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-1\right)\left(2x^2-1\right)=3x^2-4x+1 \Leftrightarrow 2x^4-3x^2+1=3x^2-4x+1 \Leftrightarrow 2x^4-6x^2+4x=0$$

$$\Leftrightarrow 2x(x-1)^2(x+2)=0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x+2)=0 \Leftrightarrow x=1 \ \vee \ x=-2.$$

Quay lại thế vào $(*)$, ta có:

+) Với $x=1$ thì $y+1=0 \Leftrightarrow y=-1$. +) Với $x=-2$ thì $y+1=\frac{3}{-2} \Leftrightarrow y=\frac{-5}{2}$.

Vậy nghiệm của hệ là $\boxed{(x;y)=(1;-1),\left(-2;\frac{-5}{2}\right)}$

Bài 24: Thay $x=0$ vào phương trình thứ hai thấy không thoả mãn nên suy ra $x\neq 0$.

Với điều kiện này, hệ tương đương với: $\begin{cases}\dfrac{y}{x^2}+\dfrac{y^2}{x}=6\\ \dfrac{1}{x^2}+y^2=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{y}{x}\left(\dfrac{1}{x}+y\right)=6\\ \left(\dfrac{1}{x}+y\right)^2-\dfrac{2y}{x}=5\end{cases} \quad (\mathrm{I})$

Đặt $a=\frac{1}{x}+y$, $b=\frac{y}{x}$ thì hệ (1) trở thành:

$$\begin{cases}ba=6\\ a^2-2b=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=\dfrac{a^2-5}{2}\\ \dfrac{a^2-5}{2}.a=6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=\dfrac{a^2-5}{2}\\ a^3-5a-12=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=\dfrac{a^2-5}{2}\\ (a-3)\left(a^2+3a+4\right)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}b=\dfrac{a^2-5}{2}\\ a=3 \quad \left(do\ \ a^2+3a+4=\left(a+\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}>0\right)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=3\\ b=2\end{cases}$$

Với $a=3, b=2$, thay trở lại bước đặt:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+y=3\\ \dfrac{y}{x}=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=2x\\ \dfrac{1}{x}+2x=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=2x\\ 2x^2-3x+1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=2x\\ \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases} \vee \begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\\ y=1\end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ là $\boxed{(x;y)=(1;2),\left(\frac{1}{2};1\right)}$

Bài 25: Hệ đã cho tương đương với:

$$\begin{cases}y^2=-5x^2+16x+16\\ y^2+\left(-5x^2+16x+16\right)-8y-4xy=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y^2=-5x^2+16x+16\\ 2y^2-8y-4xy=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}y^2=-5x^2+16x+16\\ 2y(y-4-2x)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y^2=-5x^2+16x+16\\ y=0 \ \vee \ y=2x+4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (\mathrm{I})\begin{cases} y=0 \\ (5x+4)(4-x)=0 \end{cases} \vee \quad (\mathrm{II})\begin{cases} y=2x+4 \\ (2x+4)^2=-5x^2+16x+16 \end{cases}$$

Giải hệ (I) ta được $(x;y)=(4;0),\left(\frac{-4}{5};0\right)$.

Giải hệ $(\mathrm{II}) \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+4 \\ 9x^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=4 \end{cases}$.

Vậy nghiệm của hệ là $\boxed{(x;y)=(4;0),\left(\frac{-4}{5};0\right),(0;4)}$

Bài 26: Ta thấy giá trị $y=0$ không thoả mãn phương trình thứ nhất của hệ $\Rightarrow y\neq 0$.

Lúc này hệ đã cho tương đương với: $\begin{cases} \dfrac{x^2+1}{y}+x+y=4 \\ x+y-2=\dfrac{y}{x^2+1} \end{cases}$.

Đặt $x+y=a$ $,\dfrac{x^2+1}{y}=b$ $(b\neq 0)$ thì hệ trở thành:

$$\begin{cases} a+b=4 \\ a-2=\dfrac{1}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4-b \\ \dfrac{1}{b}+2-(4-b)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4-b \\ b^2-2b+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ a=3 \end{cases} \text{(thoả mãn)}$$

Trở lại bước đặt: $\begin{cases} x+y=3 \\ \dfrac{x^2+1}{y}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x^2+1 \\ x+x^2+1=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x^2+1 \\ x^2+x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-2 \\ y=5 \end{cases}$

Vậy nghiệm của hệ là $\boxed{(x;y)=(1;2),(-2;5)}$

Bài 27: Dùng phép thế:

$$\begin{cases} 2x^3-9y^3=(x-y)(2xy+x^2+y^2-xy) \\ x^2-xy+y^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3-9y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2) \\ x^2-xy+y^2=3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3-9y^3=x^3-y^3 \\ x^2-xy+y^3=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3=8y^3 \\ x^2-xy+y^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y \\ 4y^2-2y^2+y^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y \\ y^2=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=2 \end{cases} \vee \begin{cases} y=-1 \\ x=-2 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ là $\boxed{(x;y)=(2;1),(-2;-1)}$

Bài 28: Biến đổi hệ để đặt ẩn phụ:

$$\begin{cases} 3(x^2+2xy+y^2)+(x^2-2xy+y^2)+\dfrac{3}{(x+y)^2}=7 \\ (x+y)+\dfrac{1}{x+y}+(x-y)=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x+y)^2+\dfrac{3}{(x+y)^2}+(x-y)^2=7 \\ (x+y)+\dfrac{1}{x+y}+(x-y)=3 \end{cases}$$

Đặt $a=x+y+\frac{1}{x+y}; b=(x-y)\ \ (|a|\ge 2)\Rightarrow a^2-2=(x+y)^2+\frac{1}{(x+y)^2}$. Hệ trở thành:

$$\begin{cases}3a^2+b^2=13\\ a+b=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=3-a\\ 3a^2+(3-a)^2=13\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=3-a\\ 4a^2-6a-4=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\ (\text{TM})\vee a=\frac{-1}{2}\ (\text{không TM})\\ b=3-a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\ b=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y=2\\ x-y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{3}{2}\\ y=\frac{1}{2}\end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ là $\boxed{(x;y)=\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)}$

Bài 29: Điều kiện $x,y>0$. Đặt $a=\sqrt{x}$, $b=\sqrt{2y}$ $(a,b>0)$ thì hệ trở thành:

$$\begin{cases}b\left(3-\frac{10}{b^2+84a^2}\right)=4\\ a\left(3-\frac{10}{b^2+84a^2}\right)=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3-\frac{10}{b^2+84a^2}=\frac{4}{b}\\ 3-\frac{10}{b^2+84a^2}=\frac{2}{a}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{4}{b}=\frac{2}{a}\\ 3-\frac{10}{b^2+84a^2}=\frac{2}{a}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=2a\\ 3-\frac{10}{b^2+84a^2}=\frac{2}{a}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}b=2a\\ 3-\frac{10}{88a^2}=\frac{2}{a}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=2a\\ \frac{5}{44}.\frac{1}{a^2}+\frac{2}{a}-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=2a\\ 5.\frac{1}{a^2}+\frac{2}{a}-132=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=2a\\ \frac{1}{a}=\frac{-1\pm\sqrt{661}}{5}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}b=2a\\ a=\frac{5}{-1+\sqrt{661}}\end{cases}(a>0)\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{1+\sqrt{661}}{132}\\ b=\frac{1+\sqrt{661}}{66}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\left(\frac{1+\sqrt{661}}{132}\right)^2\\ y=\frac{1}{2}\left(\frac{1+\sqrt{661}}{66}\right)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{331+\sqrt{661}}{8712}\\ y=\frac{331+\sqrt{661}}{4356}\end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ là $\boxed{(x;y)=\left(\frac{331+\sqrt{661}}{8712};\frac{331+\sqrt{661}}{4356}\right)}$

Bài 30: Cộng vế theo vế hai phương trình: $2xy\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-2x+9}}+\frac{1}{\sqrt[3]{y^2-2y+9}}\right)=x^2+y^2$

Đánh giá hai vế của phương trình này:

+) $\text{VT}=2xy\left(\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2+8}}+\frac{1}{\sqrt[3]{(y-1)^2+8}}\right)\le 2xy\left(\frac{1}{\sqrt[3]{8}}+\frac{1}{\sqrt[3]{8}}\right)=2xy$.

+) $\text{VP}=x^2+y^2\ge 2xy\ \left(\text{do } (x-y)^2\ge 0\right)$.

Mà ta lại có VT = VP nên dấu bằng ở các đẳng thức trên phải xảy ra, tức là:

$$\begin{cases}(x-1)=(y-1)=0\\ x=y\end{cases}\Leftrightarrow x=y=1.$$

Thử lại, ta thấy rằng $(1;1)$ là nghiệm của hệ đã cho.

Vậy nghiệm của hệ là $\boxed{(x;y)=(1;1)}$

Bài 31: Nhận thấy rằng nếu sử dụng phép thế thì bậc của phương trình nhận được sẽ rất lớn (cụ thể là bậc 9, ta có thể nhẩm được một nghiệm và việc chứng minh phương trình bậc 8 nhận được (sau khi dùng chia bằng sơ đồ Hooc–ne) sẽ rất khó chứng minh nó vô nghiệm). Vì vậy với bài này chúng ta sử dụng phương pháp đánh giá:

$$\begin{cases} y=-x^3+3x+4 \\ x=2y^3-6y-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-2=-x^3+3x+2 \\ x-2=2\left(y^3-3y-2\right) \end{cases} \Leftrightarrow (\mathrm{I})\begin{cases} y-2=-(x+1)^2(x-2) & (1) \\ x-2=2(y+1)^2(y-2) & (2) \end{cases}$$

+) Nếu $x>2$ thì từ $(1)\Rightarrow y-2<0$ và từ $(2)\Rightarrow y<2$, mâu thuẫn nên loại.

+) Nếu $x>2$ thì từ $(1)\Rightarrow y-2>0$ và từ $(2)\Rightarrow y>2$, mâu thuẫn nên cũng loại nốt.

+) Nếu $x=2$ thì thay vào (I) tìm được $y=2$.

Vậy nghiệm của hệ là $\boxed{(x;y)=(2;2)}$

Bài 32: Từ phương trình thứ hai ta đặt điều kiện $x,y>0$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với: $e^x-x=e^y-y \quad (1)$.

Xét hàm số $f(t)=e^t-t$ trên $(0;+\infty)$. Đạo hàm: $f'(t)=e^t-1>e^0-1=0$ nên hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$. Ta lại có (1) có dạng $f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$.

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\log_2^2 x+3\log_{\frac{1}{2}} x=-2 \Leftrightarrow \log_2^2 x-3\log_2 x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x=1 \\ \log_2 x=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=4 \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của hệ là $\boxed{(x;y)=(2;2),(4;4)}$

Bài 33: Trừ vế theo vế hai phương trình của hệ đã cho ta được:

$$x^3-y^3=2\left(x^2-y^2-2x+2y\right)\Leftrightarrow (x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)=2(x-y)(x+y-2)$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(x^2+y^2+xy-2x-2y+4\right)=0\Leftrightarrow x-y=0\Leftrightarrow x=y$$

(do $x^2+y^2+xy-2x-2y+4=\frac{1}{2}(x+y)^2+\frac{1}{2}(x-2)^2+(y-2)^2>0$)

Thay $x=y$ trở lại hệ ta được:

$$\begin{cases} x=y \\ y^3+1=2y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ y^3-2y^2+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ (y-1)\left(y^2-y-1\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ y=1 \ \vee \ y=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ là $\boxed{(x;y)=(1;1),\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2};\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right),\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2};\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}$

Bài 34: Điều kiện $x^2>1$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$$\left(x+\sqrt{x^2+1}\right).\frac{y^2-\left(y^2+1\right)}{y-\sqrt{y^2+1}}=1\Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+1}=\sqrt{y^2+1}-y \quad (1)$$

(do $\sqrt{y^2+1}>\sqrt{y^2}\geq y$ nên $y-\sqrt{y^2+1}<0$). Tương tự: $y+\sqrt{y^2+1}=\sqrt{x^2+1}-x \quad (2)$.

Kết hợp $(1),(2)$ ta được hệ:

$$\begin{cases} x+\sqrt{x^2+1}=\sqrt{y^2+1}-y \\ y+\sqrt{y^2+1}=\sqrt{x^2+1}-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{y^2+1}=2\sqrt{x^2+1} \\ x+\sqrt{x^2+1}=\sqrt{y^2+1}-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=y^2 \\ x+\sqrt{x^2+1}=\sqrt{y^2+1}-y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \ \vee \ x=-y \\ x+\sqrt{x^2+1}=\sqrt{y^2+1}-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x+\sqrt{x^2+1}=\sqrt{x^2+1}-x \end{cases} \vee \begin{cases} x=-y \\ x+\sqrt{x^2+1}=\sqrt{x^2+1}+x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=-y \ \vee \ \begin{cases} x=y \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=0 \\ x=-y \end{array}\right. \Leftrightarrow x=-y \ \text{(loại } x=y=0 \text{ do } x^2>1).$$

Vậy $x=-y$. Thay vào phương trình thứ nhất của hệ thấy thoả mãn và thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được $y+\dfrac{y}{\sqrt{y^2-1}}+\dfrac{35}{12}=0 \ \ (1)$. Dễ thấy rằng $y<0$ (vì nếu $y>0$ thì vế trái dương nên nó vô lý). Kết hợp với điều kiện căn thức ta được $y<-1$.

$$(1)\Leftrightarrow y+\frac{35}{12}=\frac{-y}{\sqrt{y^2-1}} \xRightarrow{\text{SUY RA}} \left(y+\frac{35}{12}\right)^2=\frac{y^2}{y^2-1} \Leftrightarrow \left(y+\frac{35}{12}\right)^2\left(y^2-1\right)=y^2$$

$$\Leftrightarrow \left(y+\frac{35}{12}\right)^2.y^2=y^2+\left(y+\frac{35}{12}\right)^2 \Leftrightarrow \left(y^2+\frac{35}{12}y\right)^2=2y^2+\frac{35}{6}y+\frac{1225}{144}$$

$$\Leftrightarrow \left(y^2+\frac{35}{12}y-1\right)^2=\frac{1369}{144}=\left(\frac{37}{12}\right)^2 \Leftrightarrow \left(y^2+\frac{35}{12}y-1-\frac{37}{12}\right)\left(y^2+\frac{35}{12}y-1+\frac{37}{12}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(y^2+\frac{35}{12}y-\frac{49}{12}\right)\left(y^2+\frac{35}{12}y+\frac{25}{12}\right)=0 \Leftrightarrow y=\frac{-5}{4} \vee y=\frac{-5}{3} \vee y=\frac{-35\pm\sqrt{3577}}{12}.$$

(Tư tưởng trong đầu phải xác định rằng: không sợ giải phương trình bậc 4, nó có cách giải mà)

Thay lại vào phương trình (1) ta thấy chỉ có các nghiệm $y=\dfrac{-5}{4}$, $y=\dfrac{-5}{3}$ thoả mãn (1).

Vậy nghiệm của hệ là $\boxed{(x;y)=\left(\frac{5}{4};\frac{-5}{4}\right),\left(\frac{5}{3};\frac{-5}{3}\right)}$

Cách giải khác: Với bài toán này thì việc lượng giác hóa sẽ không cho kết quả đẹp.

Phương trình (1) được viết lại thành: $y-\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{y^2}}}+\dfrac{35}{12}=0$.

Với điều kiện $y<-1$, ta có thể đặt $\dfrac{1}{y}=\cos t \ \left(t\in\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)\right)$ thì phương trình trên trở thành:

$$\frac{1}{\cos t}-\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 t}}+\frac{35}{12}=0 \Leftrightarrow \frac{1}{\cos t}-\frac{1}{\sin t}+\frac{35}{12}=0 \Leftrightarrow (\sin t-\cos t)+\frac{35}{12}\sin t\cos t=0.$$

Đến đây có thể đặt $t=\sin t-\cos t$ để giải tiếp.

Bài 35: Nhận thấy rằng phương trình thứ hai của hệ đã cố ý "nhóm" hệ số của y^2 nên ta có ý tưởng đưa phương trình thứ hai của hệ thành bậc hai với ẩn là y^2.

Từ phương trình thứ nhất suy ra: $-3y=x^2-9 \Leftrightarrow -48y=16x^2-144$.

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được: $y^4+4(2x-3)y^2+16x^2-48x+11=0$.

Xem như đây là một phương trình bậc hai với ẩn là y^2 và tham số là x, ta có:

$\Delta'_{y^2}=4(2x-3)^2-16x^2+48x-11=25>0$ nên phương trình có hai nghiệm là:

$y^2=-2(2x-3)\pm 5$ hay chính là $y^2=1-4x$ hoặc $y^2=11-4x$.

+) Nếu $y^2=1-4x \Leftrightarrow x=\dfrac{1-y^2}{4}$. Thế vào phương trình thứ nhất ta được:

$$\left(\frac{y^2-1}{4}\right)^2+3y=9 \Leftrightarrow \frac{y^4-2y^2+1}{16}+3y=9 \Leftrightarrow y^4=2y^2-48y+143$$

$$\Leftrightarrow (y^2+1)^2=(2y-12)^2 \Leftrightarrow (y^2+1+2y-12)(y^2+1-2y+12)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y^2+2y-11=0 \\ y^2-2y+13=0 \ \text{(VN)} \end{array}\right. \Leftrightarrow y^2+2y-11=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-1+2\sqrt{3} \ \Rightarrow x=-3-\sqrt{3} \\ y=-1-2\sqrt{3} \ \Rightarrow x=-3+\sqrt{3} \end{array}\right. \text{(thoả mãn)}$$

+) Nếu $y^2=11-4x \Leftrightarrow x=\dfrac{11-y^2}{4}$. Thế vào phương trình thứ nhất ta được:

$$\left(\frac{y^2-11}{4}\right)^2+3y=9 \Leftrightarrow \frac{y^4-22y^2+121}{16}+3y=9 \Leftrightarrow y^4=22y^2-48y+23$$

$$\Leftrightarrow (y^2+1)^2=\left(2y\sqrt{6}-2\sqrt{6}\right)^2 \Leftrightarrow \left(y^2-2y\sqrt{6}+1+2\sqrt{6}\right)\left(y^2+2y\sqrt{6}+1-2\sqrt{6}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} y^2+2y\sqrt{6}+1-2\sqrt{6}=0 & (*) \\ y^2-2y\sqrt{6}+1+2\sqrt{6}=0 & (**) \end{array}\right.$$

Giải từng phương trình:

$$(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-\sqrt{6}+\sqrt{2}+\sqrt{3} \ \Rightarrow x=\dfrac{11-y^2}{4}=\dfrac{\sqrt{6}-2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{2} \\ y=-\sqrt{6}-\sqrt{2}-\sqrt{3} \ \Rightarrow x=\dfrac{\sqrt{6}+2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$$

$$(**) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2} \ \Rightarrow x=\dfrac{11-y^2}{4}=\dfrac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{2} \\ y=\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2} \ \Rightarrow x=\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$$

Nghiệm của hệ là $\boxed{\begin{array}{l}(x;y)=\left(-3+\sqrt{3};2\sqrt{3}-1\right),\left(-3-\sqrt{3};\,-2\sqrt{3}-1\right), \\ \left(\dfrac{\sqrt{6}-2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{2};\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}\right),\left(\dfrac{\sqrt{6}+2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{2};-\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6}\right), \\ \left(\dfrac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{2};\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}\right),\left(\dfrac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2};\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{3}\right).\end{array}}$

Bài 36: Đặt $y=\dfrac{t\sqrt{15}}{5}$. Từ phương trình thứ nhất suy ra $y\in[-1;1]\Rightarrow t\in\left[\dfrac{-\sqrt{15}}{3};\dfrac{\sqrt{15}}{3}\right]$.

Phương trình thứ hai của hệ trở thành:

$$125\left(\frac{t\sqrt{15}}{5}\right)^5-125\left(\frac{t\sqrt{15}}{5}\right)^3+6\sqrt{15}=0\Leftrightarrow 3t^5-5t^3+2=0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)^2\left(3t^3+6t^2+4t+2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\3t^3+6t^2+4t+2=0\quad(1)\end{array}\right..$$

Xét hàm số $f(t)=3t^3+6t^2+4t+2$ trên đoạn $\left[\dfrac{-\sqrt{15}}{3};\dfrac{\sqrt{15}}{3}\right]$. Hàm số có đạo hàm $f'(t)=9t^2+12t+4=(3x+2)^2\ge 0$ nên hàm số đồng biến đoạn $\left[\dfrac{-\sqrt{15}}{3};\dfrac{\sqrt{15}}{3}\right]$.

Suy ra $3t^3+6t^2+4t+2\ge f\left(\dfrac{-\sqrt{15}}{3}\right)=12-3\sqrt{15}>0$, nên (1) vô nghiệm.

Vậy $t=1\Rightarrow y=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. Thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta tìm được $x=\pm\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

Vậy các nghiệm của hệ là $\boxed{(x;y)=\left(\pm\dfrac{\sqrt{10}}{5};\dfrac{\sqrt{15}}{5}\right)}$

Bài 37: Biến đổi hệ như sau: $\begin{cases}x^3-xy^2+2000y=0\\y^3-yx^2-500x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^3-xy^2=-2000y\\y^3-yx^2=500x\quad(*)\end{cases}$

+) Nếu $x=0$, thay vào phương trình thứ hai ta được $y=0$, thoả mãn hệ.

+) Nếu $x\ne 0\Rightarrow y^3-yx^2\ne 0\Rightarrow y\ne 0$. Lúc này ta nhân chéo hai vế của hệ như sau:

$$500x\left(x^3-xy^2\right)=-2000y\left(y^3-yx^2\right)\Leftrightarrow x^4-x^2y^2=-\left(4y^4-4x^2y^2\right)$$

$$\Leftrightarrow x^4-5x^2y^2+4y^4=0\Leftrightarrow\left(x^2-y^2\right)\left(x^2-4y^2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x=y\ \vee\ x=-y\ \vee x=2y\ \vee x=-2y$$

– *Nếu* $x=y$. Thay vào (*) ta được: $x^3-x^3=500x\Leftrightarrow x=0$, loại.

– *Nếu* $x=-y$. Thay vào (*) ta được: $(-x)^3-(-x)x^2=500x\Leftrightarrow x=0$, loại nốt.

– *Nếu* $x=2y$. Thay vào ta được: $y^3-4y^3=1000y\Leftrightarrow y^3+1000y=0\Leftrightarrow y\left(y^2+1000\right)=0$

Điều này không thể xảy ra do $y\ne 0,y^2+1000>0$.

– *Nếu* $x=-2y$. Thay vào (*) ta được:

$$y^3-4y^3=-1000y\Leftrightarrow y\left(3y^2-1000\right)=0\Leftrightarrow 3y^2=1000\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=\dfrac{10\sqrt{30}}{3}\Rightarrow x=\dfrac{-20\sqrt{30}}{3}\\y=\dfrac{-10\sqrt{30}}{3}\Rightarrow x=\dfrac{20\sqrt{30}}{3}\end{array}\right.$$

Vậy hệ có các nghiệm là $\boxed{(x;y)=(0;0),\left(\frac{-20\sqrt{30}}{3};\frac{10\sqrt{30}}{3}\right),\left(\frac{20\sqrt{30}}{3};\frac{-10\sqrt{30}}{3}\right)}$

Bài 38: Thay $y=0$ vào hệ thấy không thỏa mãn nên hệ tương đương với:

$$\begin{cases}(xy)^2-2x+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{1}{y^2}-y^2\\ 2(x^2-2x+1)=-1-y^3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(xy-\dfrac{1}{y}\right)^2=\dfrac{1-y^4}{y^2} & (1)\\ 2(x-1)^2=-1-y^3 & (2)\end{cases}$$

Từ (1) $\Rightarrow 1-y^4\ge 0\Leftrightarrow 1\ge y^4\Leftrightarrow -1\le y\le 1$. Từ (2) $\Rightarrow -1-y^3\ge 0\Leftrightarrow -1\ge y^3\Leftrightarrow y\le -1$.

Vì vậy y chỉ có thể bằng $-1\Rightarrow x=1$.

Vậy nghiệm của hệ là $\boxed{(x;y)=(1;-1)}$

Bài 39: Điều kiện $x,y\in\left[0;\frac{1}{2}\right]$. Với điều kiện này suy ra $0\le xy\le\frac{1}{4}$.

Khai thác phương trình thứ nhất của hệ. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwart ta có:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+2y^2}}\right)^2\le(1^2+1^2)\left(\frac{1}{1+2x^2}+\frac{1}{1+2y^2}\right)=2\left(\frac{1}{1+2x^2}+\frac{1}{1+2y^2}\right)\ (*)$$

Đến đây ta sẽ chứng minh: $2\left(\frac{1}{1+2x^2}+\frac{1}{1+2y^2}\right)\le\frac{4}{1+2xy}$ (1) (với $0\le xy\le\frac{1}{4}$).

Thật vậy $(1)\Leftrightarrow\frac{2+2x^2+2y^2}{(1+2x^2)(1+2y^2)}\le\frac{2}{1+2xy}\Leftrightarrow(1+2xy)(1+x^2+y^2)\le(1+2x^2)(1+2y^2)$

$\Leftrightarrow 1+x^2+y^2+2xy(x^2+y^2)+2xy\le 1+2y^2+2x^2+4x^2y^2$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-2xy+2xy(2xy-x^2-y^2)\ge 0\Leftrightarrow(x-y)^2-2xy(x-y)^2\ge 0$

$\Leftrightarrow(x-y)^2(1-2xy)\ge 0$, điều này đúng do $(x-y)^2\ge 0$; $1-2xy\ge 1-2.\frac{1}{4}=\frac{1}{2}>0$.

Vậy, (1) đúng. Kết hợp với $(*)$ suy ra $\left(\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+2y^2}}\right)^2\le\frac{4}{1+2xy}$.

Lấy căn hai vế ta có : $\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+2y^2}}\le\frac{2}{\sqrt{1+2xy}}$.

Trong bài này, dấu bằng xảy ra, tức là $x=y\ge 0$; $x\le\frac{1}{2}$. Như vậy hệ đã cho trở thành:

$$\begin{cases}x=y\\ \sqrt{x(1-2x)}+\sqrt{y(1-2y)}=\dfrac{2}{9}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\ 2\sqrt{x(1-2x)}=\dfrac{2}{9}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\ x(1-2x)=\dfrac{1}{81}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\ 2x^2-x+\dfrac{1}{81}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\ x=\dfrac{1\pm\dfrac{\sqrt{73}}{9}}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\ x=\dfrac{9\pm\sqrt{73}}{36}\end{cases}\text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy nghiệm của hệ là $\boxed{(x,y)=\left(\frac{9+\sqrt{73}}{36};\frac{9+\sqrt{73}}{36}\right),\left(\frac{9-\sqrt{73}}{36};\frac{9-\sqrt{73}}{36}\right)}$ (*đề HSG quốc gia*)

Bài 40: Điều kiện $x\ge 1\,, y\ge\frac{1}{2}$.

Viết hệ lại như sau:

$$\begin{cases}(3-x)\sqrt{2-x}-2y\sqrt{2y-1}=0\\ 2\sqrt{2-x}-\sqrt{(2y-1)^3}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[1+(2-x)\right]\sqrt{2-x}=\left[1+(2y-1)\right]\sqrt{2y-1}\\ 2\sqrt{2-x}-\sqrt{(2y-1)^3}=1\end{cases}$$

Ta đặt $a=\sqrt{2-x}\,,b=\sqrt{2y-1}\,(a,b\ge 0)$ thì hệ trên trở thành:

$$\begin{cases}(1+a^2)a=(1+b^2)b\\ 2a-b^3=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^3+a=b^3+b\\ 2a-b^3=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a-b)(a^2+b^2+ab+1)=0\\ 2a-b^3=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a-b=0\ \left(\text{do } a^2+b^2+ab+1>0\right)\\ 2a-b^3=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b\\ 2a-a^3=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b\\ (a-1)(a^2+a-1)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=b\\ a=1\vee a=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\end{cases}\ \left(\text{do } a\ge 0 \text{ nên ta đã loại nghiệm } a=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

+) Nếu $a=b=1\Rightarrow\sqrt{2-x}=\sqrt{2y-1}=1\Leftrightarrow x=1;\ \ y=1.$

+) Nếu $a=b=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\Rightarrow\sqrt{2-x}=\sqrt{2y-1}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\ ,\ y=\frac{5-\sqrt{5}}{4}$.

Vậy nghiệm của hệ là $\boxed{(x;y)=(1;1),\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};\frac{5-\sqrt{5}}{4}\right)}$

Lưu ý: Có thể dùng phương pháp hàm số để kết luận $\sqrt{2-x}=\sqrt{2y-1}$.

Bài 41: Biến đổi hệ như sau:

$$\begin{cases}x^3-y^3=9\\ x^2+2y^2-x+4y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^3-1=y^3+8\\ 6y^2+12y=-3x^2+3x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^3-3x^2+3x-1=y^3+6y^2+12y+8\\ x^2+2y^2-x+4y=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)^3=(y+2)^3\\ x^2+2y^2-x+4y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=y+2\\ (y+3)^2+2y^2-(y+3)+4y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y+3\\ 3y^2+9y+6=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=y+3\\ y=-1\vee y=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=-1\end{cases}\vee\begin{cases}x=1\\ y=-2\end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ là $\boxed{(x;y)=(2;-1),(1;-2)}$

Bài 42: Chuyển số 3 từ vế trái của phương trình thứ hai sang vế phải:

$$\begin{cases}x^3-8x=y^3+2y\\ x^2-3=3(y^2+1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^3-8x=y(y^2+2)\\ x^2=3(y^2+2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^3-8x=y.\frac{x^2}{3}\\ x^2=3(y^2+2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\left(x^2-8-\frac{xy}{3}\right)=0\\ x^2=3(y^2+2)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 3x^2 - 24 - xy = 0 \end{array}\right. \\ x^2 = 3\left(y^2 + 2\right) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ 0 = 3\left(y^2 + 2\right) \ (loại) \end{cases} \\ \begin{cases} 3x^2 - 24 - xy = 0 \\ x^2 = 3\left(y^2 + 2\right) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 24 - xy = 0 \\ x^2 = 3\left(y^2 + 2\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{3x^2 - 24}{x} \\ 3y^2 + 6 - x^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{3x^2 - 24}{x} \\ 3\left(\dfrac{3x^2 - 24}{x}\right)^2 + 6 - x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{3x^2 - 24}{x} \\ 3\left(3x^2 - 24\right)^2 + 6x^2 - x^4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{3x^2 - 24}{x} \\ 26x^4 - 426x^2 + 1728 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{3x^2 - 24}{x} \\ x^2 = 9 \ \vee \ x^2 = \dfrac{96}{13} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -3 \\ y = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \dfrac{4\sqrt{78}}{13} \\ y = \dfrac{-\sqrt{78}}{13} \end{cases} \vee \begin{cases} x = \dfrac{-4\sqrt{78}}{13} \\ y = \dfrac{\sqrt{78}}{13} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ là $\boxed{(x;y) = (3;1), (-3;-1), \left(\dfrac{4\sqrt{78}}{13}; \dfrac{-\sqrt{78}}{13}\right), \left(\dfrac{-4\sqrt{78}}{13}; \dfrac{\sqrt{78}}{13}\right)}$

Cách giải khác: Cách 1: Đưa phương trình thứ nhất về dạng $x^3 - y^3 = 2y + 8x$ và đưa phương trình thứ hai về $x^2 - 3y^2 = 6$, sau đó nhân hai vế để đưa về phương trình đẳng cấp bậc 3.

Cách 2: Bình phương hệ quả như sau:

$$x^3 - 8x = y^3 + 2y \Rightarrow \left(x^3 - 8x\right)^2 = \left(y^3 + 2y\right)^2 \Leftrightarrow x^2\left(x^2 - 8\right)^2 = y^2\left(y^2 + 2\right)^2$$

Việc còn lại của chúng ta là rút y^2 từ phương trình thứ hai và thế vào phương trình trên. Tìm xong được nghiệm thì phải thử lại.

(*Đề thi dự bị đại học khối A năm 2008 – 2009*)

Bài 43: Rút y từ phương trình thứ hai và nhân hai vế của phương trình thứ nhất cho 7 ta có:

$$\begin{cases} 7y = 2x^2 + 9x - 6 \\ 7y.2x^2 + 7y.3y = 28x^2 + 7y.9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7y = 2x^2 + 9x - 6 \\ \left(2x^2 + 3x\right)\left(2x^2 + 9x - 6\right) = 28x^2 + 9\left(2x^2 + 9x - 6\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7y = 2x^2 + 9x - 6 \\ 4x^4 + 24x^3 - 31x^2 - 99x + 54 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7y = 2x^2 + 9x - 6 \\ (x + 2)(2x - 1)\left(2x^2 + 9x - 27\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{2x^2 + 9x - 6}{7} \\ x = -2 \ \vee \ x = \dfrac{1}{2} \ \vee \ x = \dfrac{-9 \pm 3\sqrt{33}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = \dfrac{-16}{7} \end{cases} \vee \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{-1}{7} \end{cases} \vee \begin{cases} x = \dfrac{-9 \pm 3\sqrt{33}}{4} \\ y = 3 \end{cases}$$

Vậy hệ có 4 nghiệm $\boxed{(x;y) = \left(-2; \dfrac{-16}{7}\right), \left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{-1}{7}\right), \left(\dfrac{-9 \pm 3\sqrt{33}}{4}; 3\right)}$

Bài 44: Biến đổi và đặt ẩn phụ để giải hệ:

$$\begin{cases} x^4 - x^3y + x^2y^2 = 1 \\ x^3y - x^2 + xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x^4 - 2x^3y + x^2y^2\right) + x^3y = 1 \\ x^3y - \left(x^2 - xy\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x^2 - xy\right)^2 + x^3y = 1 \\ x^3y - \left(x^2 - xy\right) = 1 \end{cases}$$

Đặt $a = x^2 - xy$, $b = x^3y$ thì hệ này trở thành:

$$\begin{cases} a^2 + b = 1 \\ b - a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a + 1 \\ a^2 + (a+1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a + 1 \\ a^2 + a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases}$$

+) Nếu $a = 0, b = 1 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - xy = 0 \\ x^3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = x^2 \\ x^4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$

+) Nếu $a = -1, b = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - xy = -1 \\ x^3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - xy = -1 \\ x = 0 \vee y = 0 \end{cases}$

Đến đây dễ thấy hệ này vô nghiệm.

Vậy nghiệm của hệ là $\boxed{(x;y) = (1;1),(-1;-1)}$

Bài 45: Biến đổi hệ về đặt ẩn phụ:

$$\begin{cases} x^4 - 4x^2 + y^2 - 6y + 9 = 0 \\ x^2y + x^2 + 2y - 22 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x^4 - 4x^2 + 4\right) + \left(y^2 - 6y + 9\right) = 4 \\ \left(x^2 - 2\right)(y - 3) + 4\left(x^2 - 2\right) + 4(y - 3) - 8 = 0 \end{cases}$$

Đặt $a = x^2 - 2$, $b = y - 3$ $(a \ge -2)$ thì hệ trở thành:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 4 \\ ab + 4a + 4b - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2 - 2ab = 4 \\ ab = 8 - 4(a+b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = 8 - 4(a+b) \\ (a+b)^2 + 8(a+b) - 20 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ab = 8 - 4(a+b) \\ a + b = 2 \ \vee \ a + b = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ ab = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} a + b = -10 \\ ab = 48 \end{cases}$$

Loại $a + b = -10,\ ab = 48$ do $(a+b)^2 - 4ab = 100 - 4.48 < 0$.

Với $\begin{cases} a + b = 2 \\ ab = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \end{cases}$

Quay trở lại bước đặt: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 - 2 = 0 \\ y - 3 = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - 2 = 2 \\ y - 3 = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ y = 5 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = 3 \end{cases} \end{array}\right.$

Vậy nghiệm của hệ là $\boxed{(x\ y) = \left(\pm\sqrt{2};5\right),(\pm 2;3)}$

Cách giải khác: Từ phương trình thứ hai rút x^2 theo y rồi thế vào phương trình thứ nhất được phương trình bậc 4 có nghiệm đẹp.

Bài 46: Nhận thấy $y = 0$ không thoả mãn hệ $\Rightarrow y \ne 0$.

Lúc này hệ đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} 8x^3+\dfrac{27}{y^3}=18 \\ \dfrac{4x^2}{y}+\dfrac{6x}{y^2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x^3+\dfrac{27}{y^3}=18 \\ 4x^2.\dfrac{3}{y}+2x.\dfrac{9}{y^2}=3 \end{cases}$$

Đến đây đặt $a=2x$, $b=\dfrac{3}{y}$ thì hệ lại trở thành:

$$\begin{cases} a^3+b^3=18 \\ a^2b+ab^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3+b^3+3a^2b+3ab^2=27 \\ a^3+b^3=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^3=27 \\ a^3+b^3=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ a^3+b^3=18 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=3-a \\ a^3+\left(27-27a+9a^2-a^3\right)=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=3-a \\ a^2-3a+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{3+\sqrt5}{2} \\ b=\dfrac{3-\sqrt5}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} a=\dfrac{3-\sqrt5}{2} \\ b=\dfrac{3+\sqrt5}{2} \end{cases}$$

+) Với $a=\dfrac{3+\sqrt5}{2};b=\dfrac{3-\sqrt5}{2} \Rightarrow x=\dfrac{a}{2}=\dfrac{3+\sqrt5}{4},\ y=\dfrac{3}{b}=\dfrac{9+3\sqrt5}{2}$.

+) Với $a=\dfrac{3-\sqrt5}{2};b=\dfrac{3+\sqrt5}{2} \Rightarrow x=\dfrac{3-\sqrt5}{4},\ y=\dfrac{9-3\sqrt5}{2}$.

Vậy nghiệm của hệ là $\boxed{(x;y)=\left(\dfrac{3+\sqrt5}{4};\dfrac{9+3\sqrt5}{2}\right),\left(\dfrac{3-\sqrt5}{4};\dfrac{9-3\sqrt5}{2}\right)}$

Bài 47: Biến đổi tương đương hệ như sau:

$$\begin{cases} x^2+y^2-xy=3 \\ \sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=x^2+y^2-3 \\ x^2+y^2+2+2\sqrt{\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)}=16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy=x^2+y^2-3 \\ xy+5+2\sqrt{x^2y^2+x^2+y^2+1}=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=x^2+y^2-3 \\ 2\sqrt{x^2y^2+xy+4}=11-xy \end{cases} \text{(điều kiện } xy<11\text{)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy=x^2+y^2-3 \\ 4\left(x^2y^2+xy+4\right)=(11-xy)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=x^2+y^2-3 \\ 3x^2y^2+26xy-105=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=x^2+y^2-3 \\ xy=3 \ \vee \ xy=\dfrac{-35}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy=3 \\ x^2+y^2=6 \end{cases} \text{(thoả mãn)} \vee \begin{cases} xy=\dfrac{-35}{3} \\ x^2+y^2=\dfrac{-35}{3}+3=\dfrac{-26}{3}<0 \end{cases} \text{(loại)}$$

Vậy $\begin{cases} xy=3 \\ x^2+y^2=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{3}{x} \\ x^2+\dfrac{9}{x^2}=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{3}{x} \\ x^4-6x^2+9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{3}{x} \\ x^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt3 \\ y=\sqrt3 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-\sqrt3 \\ y=-\sqrt3 \end{cases}$

Nghiệm của hệ là $\boxed{(x;y)=\left(\sqrt3;\sqrt3\right),\left(-\sqrt3;-\sqrt3\right)}$

Bài 48: Giải hệ bằng phương pháp hàm số:

$$\begin{cases} e^{x-y}+e^{x+y}=2(x+1) \\ e^{x+y}=x-y+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x-y}+(x-y+1)=2(x+1) \\ e^{x+y}=x-y+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x-y}=x+y+1 \\ x-y+1=e^{x+y} \end{cases}$$

Cộng vế theo vế của hai phương trình với nhau ta có: $e^{x-y}+(x-y)=e^{x+y}+(x+y) \quad (*)$.

Xét hàm số $f(t)=e^t+t$ trên $\mathbb{R}$. Hàm số có đạo hàm $f'(t)=e^t+1>0$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Mặt khác $(*)$ có dạng $f(x-y)=f(x+y)$ nên $x-y=x+y\Leftrightarrow y=0$.

Thay $y=0$ vào hai phương trình của hệ ta được: $e^x=x+1\Leftrightarrow e^x-x-1=0$ (**)

Khảo sát hàm số $g(x)=e^x-x-1$ trên $\mathbb{R}$. Đạo hàm $g'(x)=e^x-1$.

$g'(x)=0\Leftrightarrow e^x=1\Leftrightarrow x=0$. Đây chính là điểm cực tiểu của hàm số.

Lập bảng biến thiên, thấy rằng $g(x)\geq 0 \ \forall \ x\in\mathbb{R}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=0$, tức là (**)$\Leftrightarrow x=0$.

Vậy nghiệm của hệ là $\boxed{(x;y)=(0;1)}$

Bài 49: Điều kiện $y\geq \frac{1}{x}$, $x\neq 0$. Đặt $t=x-y$ thì phương trình thứ nhất của hệ trở thành:

$$\left(1+4^t\right).5^{1-t}=1+3^{t+2}\Leftrightarrow 5^{1-t}+5.\left(\frac{4}{5}\right)^t-3^{t+2}-1=0 \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t)=5^{1-t}+5.\left(\frac{4}{5}\right)^t-3^{t+2}-1=0$ trên $\mathbb{R}$.

Hàm số có đạo hàm $f'(t)=-5^{1-t}.\ln 5+5.\left(\frac{4}{5}\right)^t.\ln\frac{4}{5}-3^{t+2}.\ln 3<0 \ \forall \ t\in\mathbb{R}$ (dễ thấy điều này do $-5^{1-t}.\ln 5<0$, $\ln\frac{4}{5}<0$, $-3^{t+2}.\ln 3<0$).

Mặt khác ta có $f(0)=0$ nên $(1)\Leftrightarrow t=0\Rightarrow x-y=0\Leftrightarrow x=y$.

Thế $y=x$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được: $x^2-3x\sqrt{x-\frac{1}{x}}=1-2x$.

Dễ thấy rằng $x=0$ không thoả mãn nên ta có thể chia hai vế của phương trình này cho x:

$$x-3\sqrt{x-\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}-2\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{x}\right)-3\sqrt{x-\frac{1}{x}}+2=0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x-\frac{1}{x}}-1\right)\left(\sqrt{x-\frac{1}{x}}-2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x-\frac{1}{x}}=1\\ \sqrt{x-\frac{1}{x}}=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-\frac{1}{x}=1\\ x-\frac{1}{x}=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-x-1=0\\ x^2-4x-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\\ x=2\pm\sqrt{5}\end{array}\right.$$

Nghiệm $\boxed{(x;y)=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right),\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right),\left(2+\sqrt{5};2+\sqrt{5}\right),\left(2-\sqrt{5};2-\sqrt{5}\right)}$

Bài 50: Với điều kiện $x\geq 2y$, $y\neq 0$ thì phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$$2y+6y^2=x-y\sqrt{x-2y}\Leftrightarrow(x-2y)-y\sqrt{x-2y}-6y^2=0$$

Xem đây là phương trình bậc hai với ẩn là $\sqrt{x-2y}$. Ta có: $\Delta = y^2 + 24y^2 = 25y^2$ nên phương trình này có hai nghiệm là $\sqrt{x-2y} = 3y$ và $\sqrt{x-2y} = -2y$ (đây là phương trình đồng bậc).

+) Nếu $\sqrt{x-2y} = 3y \Leftrightarrow \begin{cases} y \ge 0 \\ x = 9y^2 + 2y \end{cases}$.

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\sqrt{\left(9y^2+2y\right)+3y} = \left(9y^2+2y\right)+3y-2 \Leftrightarrow \left(9y^2+5y\right) - \sqrt{9y^2+5y} - 2 = 0$$

$\Leftrightarrow \sqrt{9y^2+5y} = -1$ (loại) $\vee \sqrt{9y^2+5y} = 2$ (thỏa mãn) $\Leftrightarrow 9y^2+5y-4=0$

$\Leftrightarrow y=-1$ (loại) $\vee$ $y = \dfrac{4}{9}$ (thỏa mãn). Với $y = \dfrac{4}{9} \Rightarrow x = \dfrac{8}{3}$.

+) Nếu $\sqrt{x-2y} = -2y \Leftrightarrow \begin{cases} y \le 0 \\ x = 4y^2 + 2y \end{cases}$.

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\sqrt{\left(4y^2+2y\right)-2y} = \left(4y^2+2y\right)+3y-2 \Leftrightarrow \sqrt{4y^2} = 4y^2+5y-2$$

$\Leftrightarrow -2y = 4y^2+5y-2$ (do $y \le 0$) $4y^2+7y-2=0 \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{4}$ (loại) $\vee$ $y=-2$ (thỏa mãn)

Với $y=-2 \Rightarrow x = 12$.

Vậy nghiệm của hệ là $\boxed{(x;y) = \left(\frac{8}{3};\frac{4}{9}\right),(12;-2)}$

Bài 51: Hệ đã cho tương đương với: $\begin{cases} 2x^2 + x - \dfrac{1}{y} = 2 \\ \dfrac{1}{y} - x - 2 = \dfrac{-2}{y^2} \end{cases}$.

Đặt $a = \dfrac{1}{y}$ $(a \ne 0)$ thì hệ trên trở thành:

$$\begin{cases} 2x^2+x-a=2 \\ a-x-2=-2a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\left(x^2-a^2\right)+2(x-a)=0 \\ 2x^2+x-a=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-a)(x+a+1)=0 \\ 2x^2+x-a=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=a \\ 2a^2=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-a-1 \\ 2(a+1)^2-2a-1=2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=a \\ a=\pm 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-a-1 \\ 2a^2+2a-1=0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ x=1 \end{cases} \vee \begin{cases} a=-1 \\ x=-1 \end{cases} \vee \begin{cases} a = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} \\ x = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} a = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2} \\ x = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

+) Với $a=1$ thì $y=1$.

+) Với $a=-1$ thì $y=-1$.

+) Với $a=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$ thì $y=1+\sqrt{3}$. +) Với $a=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$ thì $y=1-\sqrt{3}$.

Vậy nghiệm của hệ là $\boxed{(x;y)=(1;1),(-1;-1),\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2};1+\sqrt{3}\right),\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2};1-\sqrt{3}\right)}$

Bài 52: Điều kiện $x^2\ge y^2$.

Đặt $a=\sqrt{x^2-y^2}, b=x+y \quad (a>0, b\ne 0)$ thì $a^2=x^2-y^2=(x-y)(x+y)$.

Suy ra $x-y=\dfrac{a^2}{x+y}=\dfrac{a^2}{b}$.

Ta lại có $y=\dfrac{1}{2}\left[(x+y)-(x-y)\right]=\dfrac{1}{2}\left(b-\dfrac{a^2}{b}\right)$.

Lúc này hệ trở thành:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left(b-\dfrac{a^2}{b}\right)a=12\\ b+a=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(b^2-a^2\right)a=24b\\ b=12-a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=12-a\\ \left(a^2+144-24a-a^2\right)a=24(12-a)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}b=12-a\\ 24a^2-168a+288=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\ b=9\end{cases}\vee\begin{cases}a=4\\ b=8\end{cases}\text{ (thoả mãn).}$$

+) *Nếu* $\begin{cases}a=3\\ b=9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2-y^2=a^2=9\\ x+y=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=\dfrac{9}{x+y}=1\\ x+y=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\ y=4\end{cases}$.

+) *Nếu* $\begin{cases}a=4\\ b=8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2-y^2=4^2=16\\ x+y=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=2\\ x+y=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\ y=3\end{cases}$.

Vậy nghiệm của hệ là $\boxed{(x;y)=(5;4),(5;3)}$

Bài 53: Điều kiện $x-y\ge 0, x+y\ge 0, y\ge 0$. Thay $y=0$ vào hệ thấy vô lí $\Rightarrow y\ne 0$.

Chia hai vế của phương trình thứ nhất của hệ cho $\sqrt{y}\ne 0$ ta được: $\sqrt{\dfrac{x}{y}+1}+\sqrt{\dfrac{x}{y}-1}=2$.

Đặt $a=\sqrt{\dfrac{x}{y}+1}, b=\sqrt{\dfrac{x}{y}-1}\ \ (a>b\ge 0)$, ta có hệ sau: $\begin{cases}a+b=2\\ a^2-b^2=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{3}{2}\\ b=\dfrac{1}{2}\end{cases}$

Thay trở lại bước đặt ta tìm được $\dfrac{x}{y}=\dfrac{5}{4}\Leftrightarrow x=\dfrac{5y}{4}$.

Thay vào phương trình thứ hai của hệ: $\sqrt{\dfrac{5y}{4}}+\sqrt{5y}=3\Leftrightarrow y=\dfrac{4}{5}\Rightarrow x=\dfrac{5}{4}.\dfrac{4}{5}=1$.

Vậy nghiệm của hệ là $\boxed{(x;y)=\left(1;\dfrac{4}{5}\right)}$

Bài 54: Thay $y=0$ vào phương trình thứ nhất của hệ ta được $x^2+1=0$, vô lí $y\ne 0$.

Chia các vế của hệ cho $y \neq 0$ ta được: $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{1}{y} + (x+y) = 4 \\ (x+y)^2 = \dfrac{2x^2}{y} + 7 + \dfrac{2}{y} \end{cases}$ (1)

Đến đây ta đặt $a = \dfrac{x^2+1}{y}$, $b = x+y$ thì hệ (1) trở thành:

$$\begin{cases} a+b=4 \\ b^2 = 2a+7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4-b \\ b^2 - 2(4-b) - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4-b \\ b^2 + 2b - 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=3 \\ a=1 \end{cases} \vee \begin{cases} b=-5 \\ a=9 \end{cases}$$

+) Với $\begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{y} = 1 \\ x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3-x \\ x^2+1 = 3-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3-x \\ x^2+x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-2 \\ y=5 \end{cases}$.

+) Với $\begin{cases} a=9 \\ b=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{y} = 9 \\ x+y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-5-x \\ x^2+1 = 9(-5-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-5-x \\ x^2+9x+46=0 \end{cases}$ (vô nghiệm)

Vậy nghiệm của hệ là $\boxed{(x;y) = (1;2),(-2;5)}$

Bài 55: Thay $y=0$ vào phương trình thứ nhất thấy ngay nó không thoả mãn $y \neq 0$.

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với:

$$2x^3 - y^3 = 1.(2y-x) \Leftrightarrow 2x^3 - y^3 = (2y^2 - x^2)(2y-x) \Leftrightarrow x^3 + 2x^2y + 2xy^2 - 3y^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^3 + 2\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{y}\right) - 5 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y} - 1\right)\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{3x}{y} + 5\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{y} = 1 \Leftrightarrow x = y.$$

Thay $x=y$ trở lại hệ ta được: $x = \pm 1$.

Vậy nghiệm của hệ là $\boxed{(x;y) = (1;1),(-1;-1)}$

Bài 56: Cộng chéo vế theo vế hai phương trình của hệ: $x^2 + \sqrt{x} + 2x = y^2 + \sqrt{y} + 2y$ (1)

Xét hàm số $f(t) = t^2 + \sqrt{t} + 2t$ trên $[0;+\infty)$. Đạo hàm $f'(t) = 2t + \dfrac{1}{2\sqrt{t}} + 2 > 0$ nên $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$. Phương trình (1) có dạng $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$.

Thay $x=y$ trở lại hệ ta được phương trình $x^2 + \sqrt{x} = 2x \Leftrightarrow \sqrt{x}\left(\sqrt{x^3} - 2\sqrt{x} + 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x + \sqrt{x} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \vee \sqrt{x} = 0 \vee x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (loại vì $\sqrt{x} = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$, vô lí) $\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1 \vee x = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Vậy nghiệm của hệ là $\boxed{(x;y) = (0;0),(1;1),\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2};\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)}$

Bài 57: Đưa phương trình thứ nhất của hệ về $2x(4x^2+1) = \sqrt{5-2y}(6-2y)$ (1).

Xét hàm số $f(t)=t(t^2+1)$ trên $\mathbb{R}$. Hàm số có đạo hàm $f'(t)=3t^2+1>0\ \forall t\in\mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. Phương trình (1) có dạng $f(2x)=f\left(\sqrt{5-2y}\right)$ nên ta có:

$$2x=\sqrt{5-2y}\Leftrightarrow\begin{cases}2x\geq 0\\4x^2=5-2y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 0\\y=\dfrac{5-4x^2}{2}\end{cases}$$

Thế vào phương trình thứ hai của hệ ta được: $4x^2+\left(\dfrac{5-4x^2}{2}\right)^2+2\sqrt{3-4x}=7$ (2).

Nhận thấy $x=0,\ x=\dfrac{3}{4}$ không là nghiệm của phương trình (2).

Xét hàm số $g(x)=4x^2+\left(\dfrac{5-4x^2}{2}\right)^2+2\sqrt{3-4x}$ trên $\left(0;\dfrac{3}{4}\right)$. Đạo hàm:

$g'(x)=8x+2.\left(\dfrac{5-4x^2}{2}\right).(-4x)-\dfrac{4}{\sqrt{3-4x}}=4x\left(4x^2-3\right)-\dfrac{4}{\sqrt{3-4x}}<0$ với mọi $x\in\left(0;\dfrac{3}{4}\right)$

Suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $\left(0;\dfrac{3}{4}\right)$. Ta lại có $g\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$ nên (2) có nghiệm $x=\dfrac{1}{2}$.

Với $x=\dfrac{1}{2}$ thì $y=2$ (thỏa mãn).

Vậy nghiệm của hệ là $\boxed{(x;y)=\left(\dfrac{1}{2};2\right)}$ (*Đề thi Đại học khối A năm 2010*)

Bài 58: Rút y từ phương trình thứ hai của hệ: $y=\dfrac{2x^2+9x-6}{7}$.

Thay vào phương trình thứ nhất:

$$2x^2.\frac{2x^2+9x-6}{7}+3x.\frac{2x^2+9x-6}{7}=4x^2+9.\frac{2x^2+9x-6}{7}$$

$$\Leftrightarrow 4x^4+24x^3-31x^2-99x+54=0\Leftrightarrow(x+2)(2x-1)\left(2x^2+9x-27\right)=0.$$

Phương trình này có 4 nghiệm như sau:

+) $x=-2\Rightarrow y=\dfrac{-16}{7}$

+) $x=\dfrac{1}{2}\Rightarrow y=\dfrac{-1}{7}$

+) $x=\dfrac{-9-\sqrt{297}}{4}\Rightarrow y=3$

+) $x=\dfrac{-9+\sqrt{297}}{4}\Rightarrow y=3$

Vậy hệ có các nghiệm là $\boxed{(x;y)=\left(-2;\dfrac{-16}{7}\right),\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{-1}{7}\right),\left(\dfrac{-9\pm\sqrt{297}}{4};3\right)}$

Bài 59: Dễ dàng thấy đây là một hệ chứa phương trình đẳng cấp.

Nếu $y=0$, thay vào hệ thấy không thoả mãn nên suy ra $y\neq 0$. Tương tự, ta có $x\neq 0$.

Thế phương trình thứ nhất vào phương trình thứ hai ta được:

$$2x^4+8y^4+(-2x-y)\left(x^3+8y^3-4xy^2\right)=0\Leftrightarrow -12xy^3+8x^2y^2-yx^3=0$$

$$\Leftrightarrow xy(x-6y)(x-2y)=0 \Leftrightarrow (x-6y)(x-2y)=0 \Leftrightarrow x=6y \quad \vee \quad x=2y$$

+) Nếu $x=6y$, thay vào phương trình thứ nhất của hệ: $200y^3=1 \Leftrightarrow y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{200}} \Rightarrow x=\dfrac{6}{\sqrt[3]{200}}$

+) Nếu $x=2y$, thay vào phương trình thứ nhất của hệ: $8y^3=1 \Leftrightarrow y=\dfrac{1}{2} \Rightarrow x=1$

Vậy nghiệm của hệ là $\boxed{(x;y)=\left(1;\dfrac{1}{2}\right),\left(\dfrac{6}{\sqrt[3]{200}};\dfrac{1}{\sqrt[3]{200}}\right)}$

Bài 60: Nếu $x=0$, thay vào phương trình thứ hai thấy không thoả mãn $\Rightarrow x\neq 0$.

Thực hiện phép chia để đưa hệ về dạng: $\begin{cases} \dfrac{y}{x^2}+\dfrac{y^2}{x}=-6 \\ \dfrac{1}{x^3}+y^3=19 \end{cases}$. Đặt $\dfrac{1}{x}=z\ (z\neq 0)$ thì hệ lại trở thành:

$$\begin{cases} yz^2+y^2z=-6 \\ z^3+y^3=19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^3+y^3+3(z^2y+zy^2)=1 \\ z^3+y^3=19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y+z)^3=1 \\ z^3+y^3=19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+z=1 \\ (1-y)^3+y^3=19 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=1-y \\ 3y^2-3y-18=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3 \\ z=-2 \end{cases} \vee \begin{cases} y=-2 \\ z=3 \end{cases}$$

+) Với $z=-2 \Rightarrow x=\dfrac{-1}{2}$ +) Với $z=3 \Rightarrow x=\dfrac{1}{3}$

Vậy nghiệm của hệ là $\boxed{(x;y)=\left(\dfrac{-1}{2};3\right),\left(\dfrac{1}{3};-2\right)}$

Bài 61: Điều kiện $2x+1\geq 0,\ y\geq 2$. Đưa phương trình thứ nhất về dạng sau:

$$(2x+1)\left[2(2x+1)^2+1\right]=\sqrt{y-2}\left[2(y-2)+1\right] \qquad (1)$$

Xét hàm số $f(t)=t(2t^2+1)$ trên $[0;+\infty)$. Hàm số có đạo hàm $f'(t)=6t^2+1>0$ nên $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$. Mặt khác (1) có dạng $f(2x+1)=f\left(\sqrt{y-2}\right)$ nên nó tương đương với $2x+1=\sqrt{y-2} \Leftrightarrow y=4x^2+4x+3$. Thay vào phương trình thứ hai ta được:

$$\sqrt{4x+2}+\sqrt{8x^2+8x+14}=6 \qquad (2)$$

Dùng máy tính nhẩm ngay được nghiệm $x=\dfrac{1}{2}$. Đến đây có hai cách giải quyết: dùng đạo hàm (vì thấy nó đồng biến) hoặc nhân liên hợp (áp dụng cách này đối với bài toán này vì nó cho kết quả nhanh hơn mà không cần lý luận quá phức tạp như đạo hàm).

$$(2) \Leftrightarrow \left(\sqrt{4x+2}-2\right)+\left(\sqrt{8x^2+8x+10}-4\right)=0 \Leftrightarrow \frac{4x-2}{\sqrt{4x+2}+2}+\frac{8x^2+8x-6}{\sqrt{8x^2+8x+10}+4}=0$$

$$\Leftrightarrow (4x-2)\left(\frac{1}{\sqrt{4x+2}+2}+\frac{2x+3}{\sqrt{8x^2+8x+10}+4}\right)=0 \Leftrightarrow 4x-2=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \Rightarrow y=6$$

(Dễ thấy với $x\geq\dfrac{-1}{2}$ thì $2x+3>0 \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{4x+2}+2}+\dfrac{2x+3}{\sqrt{8x^2+8x+10}+4}>0$)

Vậy hệ có một nghiệm $\boxed{(x;y)=\left(\frac{1}{2};6\right)}$

Bài 62: Nếu $y=0$ thì thay vào phương trình thứ nhất : $x^2+1=0$, vô lý $\Rightarrow y\neq 0$.

Dễ dàng nhìn thấy ẩn phụ trong bài toán: $\begin{cases} x^2+y^2+1+xy=y \\ x+y-2=\dfrac{y}{x^2+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{y}+(x+y)=1 \\ x+y-2=\dfrac{y}{x^2+1} \end{cases}$

Đặt $a=x+y, b=\dfrac{x^2+1}{y}$ $(b\neq 0)$ thì hệ trở thành:

$$\begin{cases} a+b=1 \\ a-2=\dfrac{1}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1-b \\ (1-b)-2=\dfrac{1}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1-b \\ (1-b).b-2b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1-b \\ b^2+b+1=0 \end{cases} \quad \text{(VN)}$$

Vậy, $\boxed{\text{hệ đã cho vô nghiệm}}$

Bài 63: Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$$7x^4+7x^3y-7y^3x-7x^2y^2+9.7(y-x)=0$$

$$\Leftrightarrow 7x\left(x^3+x^2y-y^3-xy^2\right)+9x\left(y^2-x^2\right)(y-x)=0 \quad (\text{thế số } 7=x\left(y^2-x^2\right))$$

$$\Leftrightarrow 7x\left[(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)+xy(x-y)\right]+9x(x-y)^2(x+y)=0$$

$$\Leftrightarrow x(x-y)\left[7(x+y)^2+9(x-y)(x+y)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow x(x-y)(x+y)(16x-2y)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=y \vee x=-y \vee y=8x$$

Loại ngay $x=0$, $x=y$ và $x=-y$ vì khi đó vế trái của phương trình thứ hai sẽ bằng 0 nên không thoả mãn. Vậy ta có $y=8x$. Thay vào phương trình thứ hai ta được:

$$x\left(64x^2-x^2\right)=7 \Leftrightarrow x^3=\frac{1}{9} \Leftrightarrow x=\frac{\sqrt[3]{3}}{3} \Rightarrow y=8x=\frac{8.\sqrt[3]{3}}{3}$$

Vậy nghiệm của hệ là $\boxed{(x;y)=\left(\frac{\sqrt[3]{3}}{3};\frac{8.\sqrt[3]{3}}{3}\right)}$

Bài 64: Biến đổi từ hai phương trình của hệ như sau:

$$x^3-y^3-3\left(2x^2+3y^2\right)=35-3(4x-9y) \Leftrightarrow x^3-6x^2+12x-8=y^3+9y^2+27y+27$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^3=(y+3)^3 \Leftrightarrow x-2=y+3 \Leftrightarrow x=y+5\,.$$

Vì vậy hệ đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x=y+5 \\ 2x^2+3y^2-4x+9y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y+5 \\ 2\left(y^2+10y+25\right)+3y^2-4(y+5)+9y=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y+5 \\ 5y^2+25y+30=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2 \\ x=3 \end{cases} \vee \begin{cases} y=-3 \\ x=2 \end{cases}.$$

Vậy nghiệm của hệ là $\boxed{(x;y)=(3;-2),(2;-3)}$

Bài 65: Điều kiện: $x>0,\ y\neq 0$.

Phương trình thứ nhất $\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x}+y}{x}=\dfrac{2\left(\sqrt{x}+y\right)}{y} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x}+y=0\\ y=2x\end{array}\right.$

+) Nếu $y=-\sqrt{x}$, thay vào phương trình thứ hai: $-\sqrt{x}\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)=\sqrt{3x^2+3}$.

Nhận thấy vế trái không dương, còn vế phải thì dương nên phương trình này vô nghiệm.
+) Nếu $y=2x$, thay vào phương trình thứ hai:

$$2x\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)=\sqrt{3x^2+3} \Leftrightarrow \left(2x-\sqrt{3}\right)\sqrt{x^2+1}=2x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2x\ge\sqrt{3}\\ \left(x^2+1\right)\left(4x^2-4x\sqrt{3}+3\right)=4x^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x\ge\sqrt{3}\\ 4x^4-4\sqrt{3}x^3+3x^2-4\sqrt{3}x+3=0\end{cases}$$

Dùng máy tính nhẩm nghiệm được $x=\sqrt{3}$ nên ta nhóm như sau:

$$\left(4x^4-4\sqrt{3}x^3\right)+\left(4x^2-4\sqrt{3}x\right)+\left(3-x^2\right)=0 \Leftrightarrow \left[4x^3+4x-\left(x+\sqrt{3}\right)\right]\left(x-\sqrt{3}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}x=\sqrt{3} & (\text{TM})\\ 4x^3+3x-\sqrt{3}=0 & (1)\end{array}\right.$$

Bây giờ ta giải phương trình (1). Dùng máy tính giải phương trình bậc 3, ta thấy rằng có hai nghiệm phức và một nghiệm $\approx 0,45322<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ nên phương trình này sẽ không có nghiệm thuộc $\left[\dfrac{\sqrt{3}}{2};+\infty\right)$. Vì vậy miền giá trị của hàm số chứa x đó sẽ không có giá trị bằng 0 nên dùng phương pháp hàm số để chứng minh phương trình vô nghiệm:

Xét hàm số $f(x)=4x^3+3x-\sqrt{3}$ trên $\mathrm{D}=\left[\dfrac{\sqrt{3}}{2};+\infty\right)$. Đạo hàm: $f'(x)=12x^2+3>0$ nên $f(x)$ đồng biến trên D $\Rightarrow 4x^3+3x-\sqrt{3}\ge f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\sqrt{3}>0$ nên (1) vô nghiệm.

Vậy $x=\sqrt{3}\Rightarrow y=2\sqrt{3}$.

Như vậy nghiệm của hệ là $\boxed{(x;y)=\left(\sqrt{3};2\sqrt{3}\right)}$

Cách giải khác: Khi biến đổi đến $y=2x$, ta đưa phương trình thứ hai về: $\sqrt{x^2+1}=\dfrac{2x}{2x-\sqrt{3}}$ mà hàm số $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ đồng biến, $g(x)=\dfrac{2x}{2x-\sqrt{3}}$ nghịch biến với x dương.

Bài 66: Điều kiện: $x,y>0;\ y+3x\ne 0$. Biến đổi hệ như sau: $\begin{cases}1-\dfrac{12}{y+3x}=\dfrac{2}{\sqrt{x}}\\ 1+\dfrac{12}{y+3x}=\dfrac{6}{\sqrt{y}}\end{cases}$

Cộng hai vế ta được: $\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{3}{\sqrt{y}}=1$ (1). Trừ vế theo vế ta được: $\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{3}{\sqrt{y}}=\dfrac{-12}{y+3x}$ (2)

Nhân vế theo vế của (1) với (2) ta được: $\frac{1}{x}-\frac{9}{y}=\frac{-12}{y+3x} \Leftrightarrow \frac{y-9x}{xy}=\frac{-12}{y+3x}$

$\Leftrightarrow y^2+6xy-27x^2=0 \Leftrightarrow \left(\frac{y}{x}\right)^2+6.\frac{y}{x}-27=0 \Leftrightarrow \frac{y}{x}=3$ (TM) $\vee$ $\frac{y}{x}=-9$ (loại) (do $x, y>0$)

Với $y=3x$, thay vào (1) ta được: $\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{3}{\sqrt{3x}}=1 \Leftrightarrow \sqrt{x}=1+\sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow x=4+2\sqrt{3} \Rightarrow y=12+6\sqrt{3}.$$

Vậy nghiệm của hệ là $\boxed{(x;y)=\left(4+2\sqrt{3};12+6\sqrt{3}\right)}$

(*Đề thi học sinh giỏi Quốc gia 2007 – 2008* ☹)

<u>Cách giải khác:</u> Ứng dụng số phức: Đặt $a=\sqrt{3x}$, $b=\sqrt{y}$ $(a,b>0)$ thì hệ trở thành

$$\begin{cases} a\left(1-\frac{12}{a^2+b^2}\right)=2\sqrt{3} \\ b\left(1+\frac{12}{a^2+b^2}\right)=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-\frac{12a}{a^2+b^2}=2\sqrt{3} & (1) \\ b+\frac{12b}{a^2+b^2}=6 & (2) \end{cases}$$

Nhân phương trình (2) với *i* (đơn vị ảo số phức), sau đó cộng với phương trình (1) ta được:

$$a+bi-\frac{12(a-bi)}{a^2+b^2}=2\sqrt{3}+6i.$$

Đặt $z=a+bi \Rightarrow \overline{z}=a-bi$ và $z.\overline{z}=a^2+b^2$, từ đó phương trình trên trở thành:

$$z-\frac{12.\overline{z}}{z.\overline{z}}=2\sqrt{3}+6i \Leftrightarrow z-\frac{12}{z}=2\sqrt{3}+6i \Leftrightarrow z^2-\left(2\sqrt{3}+6i\right)z-12=0.$$

Ta có: $\Delta=\left(2\sqrt{3}+6i\right)^2+4.12=24+24\sqrt{3}.i$. Một căn bậc hai của Δ là $6+2\sqrt{3}.i$ nên phương trìnhh có hai nghiệm là $z_{12}=\frac{\left(2\sqrt{3}+6i\right)\pm\left(6+2\sqrt{3}\right)i}{2}$ hay chính là:

$z_1=\left(3+\sqrt{3}\right)+\left(3+\sqrt{3}\right)i$ (thỏa mãn) và $z_2=\left(-3+\sqrt{3}\right)+\left(3-\sqrt{3}\right)i$ (không thỏa mãn $a>0$)

$$\Rightarrow a=b=3+\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{a^2}{3}=4+2\sqrt{3} \\ y=b^2=12+6\sqrt{3} \end{cases}$$

Cách giải này rất lạ và khá thú vị, thế nhưng so với cách ở trên thì dường như cách này vẫn chưa phát huy được hiệu quả làm nhanh!

<u>Bài 67:</u> Điều kiện: x, y không đồng thời bằng 0. Hệ đã cho: $\begin{cases} x+\frac{x+3y}{x^2+y^2}=3 & (1) \\ y-\frac{y-3x}{x^2+y^2}=0 & (2) \end{cases}$

+) Nếu $x=0$, thay vào (1) ta được $y=1$. Thay $y=1$ vào (2) thấy thoả mãn.

+) Nếu $x\neq 0$. Chia làm hai trường hợp:

(+) *Nếu* $y=0$. Thay vào (2) ta được $-\frac{-3x}{x^2}=0$, rõ ràng điều này vô lý.

(+) *Nếu* $y\neq 0$. Thực hiện các phép nhân:

Nhân (1) với y: $xy+\frac{xy+3y^2}{x^2+y^2}=3y$ (3). Nhân (2) với x: $xy-\frac{xy-3x^2}{x^2+y^2}=0$ (4)

Cộng (3) với (4) được một kết quả rất đẹp: $2xy+\frac{3x^2+3y^2}{x^2+y^2}=3y\Leftrightarrow 2xy+3=3y\Leftrightarrow x=\frac{3y-3}{2y}$

Đến đây chúng ta sẽ phải "chịu khổ" một chút để đi giải phương trình bậc 4. Thay vào (2):

$$y-\frac{y-\frac{9y-9}{2y}}{\left(\frac{3y-3}{2y}\right)^2+y^2}=0\Leftrightarrow y\left[\left(\frac{3y-3}{2y}\right)^2+y^2\right]-\left(y-\frac{9y-9}{2y}\right)=0.$$

Nhân hai vế với $4y\neq 0$ ta được:

$$(3y-3)^2+4y^4-\left(4y^2-18y+18\right)=0\Leftrightarrow 4y^4+5y^2-9=0\Leftrightarrow y^2=\frac{-9}{4}\,(\text{kTM})\vee\ y^2=1$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} y=1\Rightarrow x=\frac{3y-3}{2y}=0\quad(\text{kTM})\\ y=-1\Rightarrow x=3\end{array}\right.$$

Vậy hệ có hai nghiệm là $\boxed{(x;y)=(0;1),(3;-1)}$

Bài 68: Phương trình thứ hai của hệ tương đương với: $2^x+x^3=2^y+y^3$ (1)

Xét hàm số $f(t)=2^t+t^3$ trên $\mathbb{R}$ có đạo hàm $f'(t)=2^t.\ln 2+3t^2>0$ nên $f(t)$ đồng biến.

Ta lại có $(1)\Leftrightarrow f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$.

Thay $y=x$ vào phương trình thứ nhất ta được: $x^4-4x+2^{x^2-2x+4}=5$ (2)

Tiếp tục sử dụng đạo hàm. Xét hàm số $g(x)=x^4-4x+2^{x^2-2x+4}$ trên $\mathbb{R}$.

Đạo hàm: $g'(x)=4x^3-4+2(x-1).2^{x^2-2x+4}.\ln 2=2(x-1)\left(2x^2+2x+2+2^{x^2-2x+4}.\ln 2\right)$

Ta có: $g'(x)=0\Leftrightarrow x=1$ (do $2x^2+2x+2+2^{x^2-2x+4}.\ln 2>0$) mà $g(1)=5$ nên (2) chỉ có 1 nghiệm $x=1$.

Vậy nghiệm của hệ là $\boxed{(x;y)=(1;1)}$

Bài 69: Nếu $y=0$ thì từ phương trình thứ nhất suy ra $x=0$, thay vào phương trình thứ hai thấy không thoả mãn nên suy ra $y\neq 0$. Chia 2 vế của phương trình thứ nhất cho $y^{11}\neq 0$:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{11}+\frac{x}{y}=y^{11}+y\qquad(1).$$

Xét hàm số $f(t)=t^{11}+t$ trên $\mathbb{R}$ có đạo hàm $f'(t)=11t^{10}+1>0$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác (1) $\Leftrightarrow f\left(\frac{x}{y}\right)=f(y)\Leftrightarrow\frac{x}{y}=y\Leftrightarrow x=y^2>0$. Thay vào phương trình thứ hai ta được:

$$6x^2+13x+8=2x^2.\sqrt[3]{x\left(5x^2+2x+8\right)}\Leftrightarrow 6+\frac{13}{x}+\frac{8}{x^2}-2.\sqrt[3]{x\left(5x^2+2x+8\right)}=0\quad(2)$$

Xét hàm số $f(x)=6+\frac{13}{x}+\frac{8}{x^2}-2.\sqrt[3]{x(5x^2+2x+8)}$ trên $(0;+\infty)$.

Đạo hàm: $f'(x)=\frac{-13}{x^2}-\frac{16}{x^3}-2.\frac{1}{3}.(15x^2+4x+8).(5x^3+2x^2+8x)^{\frac{-2}{3}}<0\quad\forall\ x\in(0;+\infty)$ nên hàm $f(x)$ nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

Mặt khác ta lại có $f(2)=0$ nên (2) $\Leftrightarrow x=2$ (thoả mãn) $\Rightarrow y=\pm\sqrt{2}$.

Vậy nghiệm của hệ là $\boxed{(x;y)=(2;\pm\sqrt{2})}$

Bài 70: Nhận xét: hệ chứa đầy đủ các hạng tử x^2, y^2, xy, y, x nên ta nghĩ ngay đến hằng đẳng thức $(ax+by+c)^2$. Bây giờ ta nhân hệ số vào hai phương trình một cách thích hợp để đưa về hằng đẳng thức này.

Sử dụng phương pháp hệ số bất định ta nhân các hệ số như sau:

$$\begin{cases}25x^2+25y^2=5\\200x^2+150x-114=-50y(3x+1)\end{cases}$$

$\Rightarrow 225x^2+25y^2+150x-114=5-150xy-50y$ (cộng hai phương trình lại với nhau)

$\Leftrightarrow (15x)^2+(5y)^2+2.15x.5+2.15x.5y+2.5y.5+5^2=144$

$$\Leftrightarrow (15x+5y+5)^2=12^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}15x+5y+5=12\\15x+5y+5=-12\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=\frac{7}{5}-3x\\y=\frac{-17}{5}-3x\end{array}\right.$$

+) Nếu $y=\frac{7}{5}-3x$, thay vào phương trình thứ nhất của hệ:

$$x^2+\left(\frac{7}{5}-3x\right)^2=\frac{1}{5}\Leftrightarrow 10x^2-\frac{42}{5}x+\frac{44}{25}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{11}{25}\Rightarrow y=\frac{2}{25}\\x=\frac{2}{5}\Rightarrow y=\frac{1}{5}\end{array}\right.$$

+) Nếu $y=\frac{-17}{5}-3x$, thay vào phương trình thứ nhất của hệ:

$$x^2+\left(\frac{-17}{5}-3x\right)^2=\frac{1}{5}\Leftrightarrow 10x^2+\frac{102}{5}x+\frac{284}{25}=0$$, phương trình này vô nghiệm

Nghiệm của hệ là $\boxed{(x;y)=\left(\frac{11}{25};\frac{2}{25}\right),\left(\frac{2}{5};\frac{1}{5}\right)}$ (*Chọn HSG Quốc gia tỉnh Nghệ An 2010 – 2011*)

Cách giải khác và lưu ý: Phương pháp hệ số bất định với hệ phương trình hai ẩn bậc hai như thế này chúng ta sẽ trình bày ở ***Bài 258*** của tập "**HỆ PHƯƠNG TRÌNH (Phần III)**". Ta cộng phương trình thứ hai với K lần phương trình thứ hai thì tìm được $K=\frac{1}{2}$ và $K=-4$.

Bài giải trên ta đã sử dụng $K=\frac{1}{2}$.

Với $K=-4$ thì ta có như sau:

$$4x^2+3x-\frac{57}{25}+y\cdot(3x+1)-4\cdot\left(x^2+y^2-\frac{1}{5}\right)\Leftrightarrow x=\frac{100y^2-25y+37}{75(1+y)}.$$

Bây giờ ta thế trở lại vào phương trình thứ nhất của hệ:

$$\left[\frac{100y^2-25y+37}{75(1+y)}\right]^2+y^2=\frac{1}{5}\Leftrightarrow\frac{15625y^4+6250y^3+12525y^2-4100y+244}{(75y+75)^2}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{(25y-2)(5y-1)(125y^2+85y+122)}{(75y+1)^2}=0.$$

Đến đây thì mọi việc trở nên đơn giản hơn rất nhiều!

Bài 71: Điều kiện $0\le x\le 6$.

Tương tự ***Bài 22***, ta cộng hai vế của hệ lại ta được:

$$\sqrt{2x}+2\sqrt{6-x}+\sqrt[4]{2x}+2\sqrt[4]{6-x}=y^2-2\sqrt{2}y+8+3\sqrt{2}.$$

Đánh giá hai vế của phương trình này:

+) $\mathrm{VP}=\left(y-\sqrt{2}\right)^2+6+3\sqrt{2}\ge 6+3\sqrt{2}$

+) Đánh giá vế phải:

Nhận xét rằng vế phải bằng $6+3\sqrt{2}\Leftrightarrow x=2$, vì vậy dùng điểm rơi trong bất đẳng thức Cauchy, ta được:

$$\sqrt{2.x}\le\frac{x+2}{2}$$

$$2.\sqrt{6-x}\le\frac{4+6-x}{2}=\frac{10-x}{2}$$

$$\sqrt[4]{2x}=\frac{1}{\sqrt[4]{2.2}}.\sqrt[4]{2.2.2.x}\le\frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{2+2+2+x}{4}=\frac{6+x}{4\sqrt{2}}$$

$$2\sqrt[4]{6-x}=\frac{2}{\sqrt[4]{4.4.4}}.\sqrt[4]{(6-x).4.4.4}\le\frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{6-x+4+4+4}{4}=\frac{18-x}{4\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow\mathrm{VT}\le\frac{x+2}{2}+\frac{10-x}{2}+\frac{8+x}{4\sqrt{2}}+\frac{18-x}{4\sqrt{2}}=6+3\sqrt{2}\le\mathrm{VP}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\ \left(y-\sqrt{2}\right)^2=0\\ 6-x=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=\sqrt{2}\end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ là $\boxed{(x;y)=\left(2;\sqrt{2}\right)}$

Bài 72: Nhận thấy $y=0$ không thể thoả mãn hệ $\Rightarrow y\ne 0$.

Từ phương trình thứ nhất của hệ: $y^2x^2-2x+y^2=0$. Xem đây là phương trình bậc hai với ẩn x, ta có phương trình này có nghiệm $\Leftrightarrow\Delta'=1-y^4\ge 0\Leftrightarrow y^2\le 1\Leftrightarrow y\in[-1;1]$ (1).

Từ phương trình thứ hai của hệ, ta suy ra: $\Delta'=4-2\left(3+y^3\right)\ge 0\Leftrightarrow y^3\le -1\Leftrightarrow y\le -1$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $y=-1$. Thay trở lại hệ ta được: $\begin{cases}x^2-2x+1=0\\ 2x^2-4x+2=0\end{cases}\Leftrightarrow x=1$

Vậy nghiệm của hệ là $\boxed{(x;y)=(1;-1)}$

Bài 73: Từ hệ, ta nhận thấy có x^4, x^3, x^2, x và y^4, y^3, y^2, y nên ta sẽ tìm cách đưa hệ về dạng: $(x+a)^4=(y+b)^4$. Khi khai triển hằng đẳng thức $(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$, thấy rằng hệ này đã có đủ điều kiện để nhóm được hằng đẳng thức bậc 4:

$$\begin{cases} x^4=y^4+240 \\ x^3-3x^2+4x=2y^3-12y^2+32y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4=y^4+240 \\ 8x^3-24x^2+32x=16y^3-96y^2+256y \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^4-8x^3+24x^2-32x=y^4-16y^3+96y^2+256y+240$$

$$\Leftrightarrow x^4-8x^3+24x^2-32x+16=y^4-16y^3+96y^2-256y+256 \Leftrightarrow (x-2)^4=(y-4)^4$$

$$\Leftrightarrow x-2=y-4 \quad \vee \quad x-2=4-y \Leftrightarrow x=y-2 \quad \vee \quad x=6-y$$

+) Nếu $x=y-2$, thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta được:

$$(y-2)^4-y^4=240 \Leftrightarrow 8y^3-24y^2+32y+224=0 \Leftrightarrow (y+2)(y^2-5y+14)=0 \Leftrightarrow y=-2 \Rightarrow x=-4$$

+) Nếu $x=6-y$, thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta được:

$$(6-y)^4-y^4=240 \Leftrightarrow 1296-864y+216y^2-24y^3=240 \Leftrightarrow y^3-9y^2+36y-44=0$$

$$\Leftrightarrow (y-2)(y^2-7y+22)=0 \Leftrightarrow y=2 \Rightarrow x=4$$

Vậy nghiệm của hệ là $\boxed{(x;y)=(4;2),(-4;-2)}$ (*Đề thi học sinh giỏi Quốc gia 2010 – 2011*)

Bài 74: Điều kiện $-1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với: $y(y^2+1)=(x+1)\left[(x+1)^2+1\right]$ (1).

Xét hàm số $f(t)=t(t^2+1)$ trên $\mathbb{R}$. Hàm số có đạo hàm $f'(t)=3t^2+1>0\ \forall t \in \mathbb{R}$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Mặt khác (1) có dạng $f(y)=f(x+1) \Leftrightarrow y=x+1$.

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\sqrt{1-(y-1)^2}-\sqrt{y}=\sqrt{2-y}-1 \Leftrightarrow \sqrt{2y-y^2}-\sqrt{y}=\sqrt{2-y}-1 \text{ (điều kiện } 0 \le y \le 2)$$

$\Leftrightarrow \sqrt{y}+\sqrt{2-y}-\sqrt{2y-y^2}-1=0$. Đặt $a=\sqrt{y}+\sqrt{2-y} \Rightarrow a^2-2=2\sqrt{2y-y^2}$ ($a \ge \sqrt{2}$)

Phương trình lúc này trở thành: $a-\dfrac{a^2-2}{2}-1=0 \Leftrightarrow 2a-a^2=0 \Leftrightarrow a=0\ (\text{kTM}) \vee a=2\ (\text{TM})$

Với $a=2 \Rightarrow 2\sqrt{2y-y^2}=a^2-2=2 \Leftrightarrow \sqrt{2y-y^2}=1 \Leftrightarrow y^2-2y+1=0 \Leftrightarrow y=1 \Rightarrow x=0$

Vậy nghiệm của hệ là $\boxed{(x;y)=(0;1)}$ (*Đề thi chọn học sinh giỏi tỉnh Nghệ An 2010 – 2011*)

Bài 75: Biến đổi phương trình thứ nhất của hệ xuất hiện nhân tử chung:

$$2(x^3+2x-y-1)=x^2(y+1) \Leftrightarrow 2x(x^2+2)-2(y+1)-x^2(y+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2+2)(2x-y-1)=0 \Leftrightarrow 2x-y-1=0 \quad (\text{do } x^2+2>0) \Leftrightarrow 2x=y+1$$

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được: $y^3+2y+3+\ln(y^2+y+1)=0$.

Tương tự ***Bài 12***, ta giải tìm được $y=-1 \Rightarrow x=0$.

Vậy nghiệm của hệ là $\boxed{(x;y)=(0;-1)}$

Bài 76: Điều kiện $x^2-2y-1 \ge 0$.

Nhìn lướt qua ta thấy ngay phương trình thứ nhất có nhân tử chung $x-y$:

$$\left(x^3-x^2y\right)+2\left(y^2-xy\right)=0\Leftrightarrow x^2\left(x-y\right)-2y\left(x-y\right)=0\Leftrightarrow\left(x-y\right)\left(x^2-2y\right)=0$$

+) Nếu $x^2-2y=0$ không thỏa mãn điều kiện.

+) Nếu $x=y$, thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$2\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt[3]{x^3-14}=x-2\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-2x-1}=\left(x-2\right)-\sqrt{x^3-14}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-2x-1}=\frac{\left(x-2\right)^3-\left(x^3-14\right)}{\left(x-2\right)^2+\sqrt[3]{\left(x^3-14\right)^2}+\left(x-2\right).\sqrt[3]{x^3-14}}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-2x-1}=\frac{-6x^2+12x+6}{\left(x-2\right)^2+\sqrt[3]{\left(x^3-14\right)^2}+\left(x-2\right).\sqrt[3]{x^3-14}}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-2x-1}+\frac{6\left(x^2-2x-1\right)}{\left(x-2\right)^2+\sqrt[3]{\left(x^3-14\right)^2}+\left(x-2\right).\sqrt[3]{x^3-14}}=0$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x^2-2x-1}\left(1+\frac{3\sqrt{x^2-2x-1}}{\left(x-2\right)^2+\sqrt[3]{\left(x^3-14\right)^2}+\left(x-2\right).\sqrt[3]{x^3-14}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x^2-2x-1}=0\Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{2}.$$

Nghiệm của hệ là $\boxed{\left(x;y\right)=\left(1+\sqrt{2};1+\sqrt{2}\right),\left(1-\sqrt{2};1-\sqrt{2}\right)}$

Bài 77: Điều kiện $x,y\in\left[-1;1\right]$.

Từ những điều hiển nhiên đúng sau:

$$\left.\begin{array}{l}\left(x-\sqrt{1-y^2}\right)^2\ge 0\Leftrightarrow x^2+1-y^2\ge 2x\sqrt{1-y^2}\\ \left(y-\sqrt{1-x^2}\right)^2\ge 0\Leftrightarrow y^2+1-x^2\ge 2y\sqrt{1-x^2}\end{array}\right\}\Rightarrow x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\le 1$$

Vậy nên phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$$\begin{cases}x=\sqrt{1-y^2}\\ y=\sqrt{1-x^2}\end{cases}\Rightarrow x,y\in\left[0;1\right]\Rightarrow\begin{cases}0\le 1-x\le 1\\ 1\le 1+y\le 2\end{cases}\Rightarrow 0\le\left(1-x\right)\left(1+y\right)\le 2$$

Vậy ta lại có phương trình thứ hai của hệ phải tương đương với $\begin{cases}1-x=1\\ 1+y=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ y=1\end{cases}$

Thay trở lại hệ ta thấy thoả mãn.

Vậy nghiệm của hệ là $\boxed{\left(x;y\right)=\left(0;1\right)}$

Cách giải khác: Cách giải trên dùng cho những bạn khá tinh trong việc nhìn nhận bất đẳng thức. Cách giải sau sẽ mang tính hệ thống hơn:

Đặt $x=\cos a, y=\cos b\ \left(a,b\in\left[0;\pi\right]\right)\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{1-x^2}=\sqrt{\sin^2 a}=\sin a\\ \sqrt{1-y^2}=\sqrt{\sin^2 b}=\sin b\end{cases}$ (do $a,b\in\left[0;\pi\right]$).

Hệ trở thành:

$$\begin{cases}\cos a.\sin b+\sin a.\cos b=1\\(1-\cos a)(1+\cos b)=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin(a+b)=1\\(1-\cos a)(1+\cos b)=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=\dfrac{\pi}{2}\quad (\text{do } a,b\in[0;\pi]\\(1-\cos a)(1+\sin a)=2\quad (2)\end{cases}$$

Giải phương trình (2) với $a\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$: $(2)\Leftrightarrow\sin a-\cos a-\sin a.\cos a-1=0$.

Đặt $t=\sin a-\cos a\quad\left(|t|\le\sqrt{2}\right)\Rightarrow\sin a.\cos a=\dfrac{1-t^2}{2}$, phương trình trên trở thành:

$$t-\frac{1-t^2}{2}-1=0\Leftrightarrow t^2+2t-3=0\Leftrightarrow t=1\ (\text{TM})\ \vee\ t=-3\quad(\text{loại}).$$

Với $t=1\Rightarrow\sin a-\cos a=1\Leftrightarrow\sin\left(a-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4}+k2\pi\\a-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.\quad(k\in\mathbb{Z})$.

Với điều kiện $a\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ thì hệ thống trên chỉ có một nghiệm là $a=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow b=\dfrac{\pi}{2}-a=0$.

Vậy $x=\cos a=\cos\dfrac{\pi}{2}=0$, $y=\cos b=\cos 0=1$.

* Nhận thấy rằng $x,y\in[-1;1]$, ta nghĩ ngay đến việc đổi biến về hàm sin, cos.

Bài 78: Rút xy từ phương trình thứ hai: $xy=\dfrac{6x+6-x^2}{2}$. Thay vào phương trình thứ nhất:

$$x^4+2x^2.\frac{6x+6-x^2}{2}+\left(\frac{6x+6-x^2}{2}\right)^4=2x+9\Leftrightarrow x^4+12x^3+48x^2+64x=0$$

$\Leftrightarrow x(x+4)^3=0\Leftrightarrow x=0\ \vee\ x=-4$.

+) Nếu $x=0$, không thoả mãn.

+) Nếu $x=-4$, thay vào hệ tìm được $y=\dfrac{17}{4}$.

Vậy nghiệm của hệ là $\boxed{(x;y)=\left(-4;\dfrac{17}{4}\right)}$ (*Đề thi đại học Khối B năm 2008 – 2009* ☺)

Bài 79: Xem phương trình thứ hai của hệ như là phương trình bậc hai ẩn *x*, tham số y :

$$x^2+(y-7)x+y^2-6y+14=0\quad (*).$$

(*) có nghiệm $\Leftrightarrow\Delta_x\ge0\Leftrightarrow(y-7)^2-4(y^2-6y+14)\ge0\Leftrightarrow-3y^2+10y-7\ge0\ \Leftrightarrow1\le y\le\dfrac{7}{3}$.

Tương tự xem phương trình là phương trình bậc hai ẩn *y*, tham số x :

$$y^2+(x-6)y+x^2-7x+14=0\quad (**).$$

(**) có nghiệm $\Leftrightarrow\Delta_y\ge0\Leftrightarrow(x-6)^2-4(x^2-7x+14)\ge0\Leftrightarrow-3x^2+16x-20\ge0$

$$\Leftrightarrow 2\le x\le\frac{10}{3}.$$

Vậy ta có $y \in \left[1;\frac{7}{3}\right]$ và $x \in \left[2;\frac{10}{3}\right]$. Phương trình thứ nhất của hệ $\Leftrightarrow \left(2x-\frac{1}{x}\right)\left(2y-\frac{1}{y}\right)=\frac{7}{2}$.

Xét hàm số $f(x)=2x-\frac{1}{x}$ trên $\left[2;\frac{10}{3}\right]$ có đạo hàm $f'(x)=2+\frac{1}{x^2}>0$ nên $f(x)$ đồng biến trên $\left(2;\frac{10}{3}\right) \Rightarrow f(2) \le \left(2x-\frac{1}{x}\right) \le f\left(\frac{10}{3}\right)$ hay chính là $\frac{7}{2} \le \left(2x-\frac{1}{x}\right) \le \frac{191}{30}$ (1).

Tương tự, ta có $f(1) \le \left(2y-\frac{1}{y}\right) \le f\left(\frac{7}{3}\right)$ hay chính là $1 \le \left(2y-\frac{1}{y}\right) \le \frac{89}{21}$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \left(2x-\frac{1}{x}\right)\left(2y-\frac{1}{y}\right) \ge \frac{7}{2}$. Vậy nên phương trình thứ hai của hệ tương đương với: $(x;y)=(2;1)$. Thay trở lại vào hệ thấy không thoả mãn.

Vậy $\boxed{\text{hệ đã cho vô nghiệm}}$

Bài 80: Phương trình thứ nhất: $x-y=\cos x-\cos y \Leftrightarrow x-\cos x=y-\cos y$ (1)

Xét hàm số $f(t)=t-\cos t$ trên $\mathbb{R}$. Đạo hàm $f'(t)=1+\sin t \ge 0$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác (1) có dạng $f(x)=f(y) \Leftrightarrow x=y$. Thay vào phương trình thứ hai:

$$x^3-3x-18=0 \Leftrightarrow (x-3)\left(x^2+3x+6\right)=0 \Leftrightarrow x=3 \text{ (dễ thấy } x^2+3x+6>0)$$

Vậy nghiệm của hệ là $\boxed{(x;y)=(3;3)}$

Bài 81: Nếu $x=0$ thì $y=0$ và ngược lại nên $(0;0)$ là một nghiệm của hệ.

Với $x \ne 0,\ y \ne 0$. Thực hiện phép chia cho xy và x^2y^2 ta có:

$$\begin{cases} x+\frac{1}{x}+y+\frac{1}{y}=18 \\ x^2+\frac{1}{x^2}+y^2+\frac{1}{y^2}=208 \end{cases} \Leftrightarrow (\mathrm{I}) \begin{cases} x+\frac{1}{x}+y+\frac{1}{y}=18 \\ \left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2=212 \end{cases}$$

Đặt $a=x+\frac{1}{x}, b=y+\frac{1}{y}$ $\left(|a| \ge 2,\ |b| \ge 2\right)$ thì hệ (I) trở thành:

$$\begin{cases} a+b=18 \\ a^2+b^2=212 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=18-a \\ a^2+(18-a)^2=212 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=18-a \\ a^2-18a+56=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=14 \end{cases} \vee \begin{cases} a=14 \\ b=4 \end{cases}$$

+) Nếu $\begin{cases} a=4 \\ b=14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+\frac{1}{x}=4 \\ y+\frac{1}{y}=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+1=0 \\ y^2-14y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2\pm\sqrt{3} \\ y=7\pm4\sqrt{3} \end{cases}$

+) Tương tự, nếu $\begin{cases} a=14 \\ b=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=7\pm4\sqrt{3} \\ y=2\pm\sqrt{3} \end{cases}$

Vậy hệ có 9 nghiệm là $\boxed{(x;y)=(0;0),\left(2\pm\sqrt{3};7\pm4\sqrt{3}\right),\left(7\pm4\sqrt{3};2\pm\sqrt{3}\right)}$

Bài 82: Điều kiện: $0\le y\le 1$; $xy\ge 0$; $xy-y\ge 0$.

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với: $\sqrt{y}=1+2\sqrt{xy-y}\Rightarrow\sqrt{y}\ge 1\Rightarrow y\ge 1$. Kết hợp với điều kiện ta phải có $y=1$. Thay vào hệ ta có: $\begin{cases}\sqrt{x}=1\\ 2\sqrt{x-1}-1=-1\end{cases}\Leftrightarrow x=1$.

Thử lại thấy $(1;1)$ là nghiệm của hệ.

Vậy nghiệm của hệ là $\boxed{(x;y)=(1;1)}$

Bài 83: Biến đổi đưa hệ về: $\begin{cases}x\left(4x^2+3y^2\right)=7y & (1)\\ y\left(y^2+6x^2\right)=7 & (2)\end{cases}$

Từ (2) suy ra $y>0$ (do $y^2+6x^2>0$) $\Rightarrow 7y>0\Rightarrow x>0$.

Đưa hệ về dạng sau:

$$\begin{cases}4x^3+3xy^2=7y\\ y^3+6x^2y=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x^3-6x^2y+3xy^2-y^3=7y-7\\ y^3+6x^2y=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-y)\left(4x^2-2xy+y^2\right)=7(y-1)\\ y^3+6x^2y=7 \qquad (3)\end{cases}$$

Dễ thấy $4x^2-2xy+y^2=3x^2+(x-y)^2>0$ (do $x,\ y>0$)

+) Nếu $y>1\Rightarrow 7(y-1)>0\Rightarrow(x-y)>0\Leftrightarrow x>y\Rightarrow x>1$.

Với $x>1,\ y>1$ thì ta lại có $y^3+6x^2y>1+6=7$, trái với (3), loại.

+) Tương tự với $y<1$, loại nốt.

+) Với $y=1$, thay vào phương trình thứ nhất của hệ trên ta được $x=1$.

Thử lại, ta thấy $(1;1)$ là nghiệm của hệ phương trình.

Vậy nghiệm của hệ là $\boxed{(x;y)=(1;1)}$

Bài 84: Nhân hai vế của phương trình thứ hai với 3 rồi cộng với phương trình thứ nhất ta được:

$$x^3+3xy^2+3x^2-24xy+3y^2=-49+24y-51x$$

$$\Leftrightarrow\left(x^3+3x^2+51x+49\right)+\left(3xy^2+3y^2\right)-(24xy+24y)=0$$

$$\Leftrightarrow(x+1)\left(x^2+2x+49\right)+3y^2(x+1)-24y(x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow(x+1)\left(x^2+2x+1+3y^2-24y+48\right)=0\Leftrightarrow(x+1)\left[(x+1)^2+3(y-4)^2\right]=0$$

$$\Leftrightarrow x=-1\ \vee\ (x;y)=(-1;4).$$

Thấy rằng $(-1;4)$ là một nghiệm của hệ nên ta xét trường hợp còn lại $x=-1$:

Thay $x=-1$ trở lại hệ ta được: $\begin{cases}-1-3y^2=-49\\ 1+8y+y^2=8y+17\end{cases}\Leftrightarrow y^2=16\Leftrightarrow y=\pm4$

Vậy hệ có hai nghiệm $\boxed{(x;y)=(-1;\pm4)}$ (*Đề thi học sinh giỏi Quốc gia 2004 – 2005*)

Cách giải khác: Đặt $u = x + y, v = x - y \Rightarrow x = \frac{u+v}{2}, y = \frac{u-v}{2}$, thay vào hệ ta đưa về hệ phương trình mới. Sau đó cộng hai vế đưa về hằng đẳng thức bậc 3 (sẽ hơi phức tạp với những bạn chưa quen biến đổi phức tạp ☺).

Bài 85: Dạng quá quen thuộc: một phương trình đẳng cấp. Thế số 12 ở phương trình thứ nhất:

$$x^3 + 2xy^2 + \left(8y^2 + x^2\right)y = 0 \Leftrightarrow x^3 + x^2y + 2xy^2 + 8y^3 = 0 \quad (1)$$

Dễ thấy $y = 0$ không thoả mãn hệ $\Rightarrow y \neq 0$. Chia hai vế của (1) cho $y^3 \neq 0$:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^3 + \left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{y}\right) + 8 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y} + 2\right)\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{x}{y} + 4\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{y} = -2 \Leftrightarrow x = -2y$$

(thấy rằng $\frac{x^2}{y^2} + \frac{x}{y} + 4 = \left(\frac{x}{y} + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} > 0$)

Thay $x = -2y$ vào phương trình thứ hai của hệ ban đầu:

$$8y^2 + 4y^2 = 12 \Leftrightarrow y^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \Rightarrow x = -2 \\ y = -1 \Rightarrow x = 2 \end{array}\right.$$

Vậy hệ có hai nghiệm là $\boxed{(x;y) = (1;-2),(-1;2)}$

Bài 86: Lại là hệ chứa phương trình đẳng cấp. Quá quen rồi nhỉ ☺.

Nghiệm của hệ là $\boxed{(x;y) = \left(\frac{\sqrt{6}}{2};\frac{\sqrt{6}}{2}\right),\left(\frac{-\sqrt{6}}{2};\frac{-\sqrt{6}}{2}\right)}$

Bài 87: Thêm một hệ chứa phương trình đẳng cấp nữa.

Nghiệm của hệ là $\boxed{(x;y) = (0;1),(1;0)}$

Bài 88: Cách giải phương trình này đã rất quen thuộc:

Thấy $y = 0$ không thoả mãn hệ $\Rightarrow y \neq 0$. Với $y \neq 0$ thì hệ tương đương với:

$$\begin{cases} 27.x^3 + \frac{125}{y^3} = 9 \\ 45.\frac{x^2}{y} + 75.\frac{x}{y^2} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3x)^3 + \left(\frac{5}{y}\right)^3 = 9 \\ (3x)^2.\frac{5}{y} + 3x.\left(\frac{5}{y}\right)^2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3x)^3 + \left(\frac{5}{y}\right)^3 = 9 \\ 3.(3x)^2.\frac{5}{y} + 3.3x.\left(\frac{5}{y}\right)^2 = 18 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3x)^3 + 3.(3x)^2.\frac{5}{y} + 3.3x.\left(\frac{5}{y}\right)^2 + \left(\frac{5}{y}\right)^2 = 27 \\ 27x^3 + \frac{125}{y^3} = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(3x + \frac{5}{y}\right)^3 = 27 \\ 27x^3 + \frac{125}{y^3} = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + \frac{5}{y} = 3 \\ 27x^3 + \frac{125}{y^3} = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{y} = 3 - 3x \\ 27x^3 + (3-3x)^3 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{y} = 3 - 3x \\ 2 - 9x + 9x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = 5 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ là $\boxed{(x;y) = \left(\frac{2}{3};5\right),\left(\frac{1}{3};\frac{5}{2}\right)}$

Bài 89: ***Phân tích:*** Trong các phương pháp giải hệ ta đã từng gặp, nếu ta sử dụng phép thế y^4 ở phương trình thứ nhất bằng $x^3 - 2x^2 + 2x$ thì ta sẽ nhận được một phương trình bậc 6. Vẫn có thể nhẩm được *một số nghiệm* của hệ này, thế nhưng để dùng sơ đồ Hoóc–ne chia đa thức thì (để làm giảm bậc của phương trình) có lẽ rằng hơi phức tạp (chưa thử làm những có lẽ sẽ phức tạp). Còn nếu ta dùng các phép nhân ước lượng để đưa về dạng $(x+a)^4 = (y+b)^4$ thì sẽ không làm được do hệ số của x^4 và y^4 là dương mà chúng lại ở cùng một vế, thế nên khi chuyển vế thì sẽ không đưa được về dạng này. Đạo hàm? Nếu thế thì chỉ dùng được ở phương trình thứ hai. Thế nhưng việc này không thực hiện được do bên vế phải chỉ có y^2, mà vế phải không thể đưa về dạng này. Vậy chỉ dùng được phương pháp đánh giá. Đưa hệ về:

$$\begin{cases} x^4 - 1 = 1 - y^2 \\ x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = y^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2-1)(x^2+1) = 1 - y^2 & (1) \\ (x-1)(x^2 - x + 1) = y^2 - 1 & (2) \end{cases}$$

+) Nếu $y^2 > 1$ thì từ (2) suy ra $x > 1$ và từ (1) suy ra $x^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$, mâu thuẫn.

+) Tương tự $y^2 < 1$, ta cũng nhận được điều mâu thuẫn.

+) Nếu $y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm 1$, thay vào hệ tìm được $x = 1$.

Vậy nghiệm của hệ là $\boxed{(x;y) = (1;\pm 1)}$

Bài 90: Khó khăn khi giải phương trình này bởi vì ta không sử dụng được phép thế. Dùng thử điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai cũng không đánh giá được. Không thể dùng hàm số vì chứa xy (ở phương trình thứ nhất) và x^2y (ở phương trình thứ hai). Cần biến đổi khéo léo:

+) Nếu $x = 0$ thì $y = 0$.

+) Nếu $x \neq 0$. Ta chia hai vế lần lượt 2 phương trình của hệ cho x, x^2, ta được:

$$\begin{cases} x - 2y + 1 + \dfrac{y}{x} = 0 \\ x^2 - 4y + 3 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \left(x + \dfrac{y}{x}\right) + 1 \\ \left(x + \dfrac{y}{x}\right)^2 - 6y + 3 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ này ta được các nghiệm:

+) $\begin{cases} x + \dfrac{y}{x} = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \dfrac{1}{x} = 0 \\ y = 1 \end{cases}$, vô lí do $\left|x + \dfrac{1}{x}\right| \geq 2$

+) $\begin{cases} x + \dfrac{y}{x} = 3 \\ y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ x + \dfrac{4}{x} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ x^2 - 3x + 4 = 0 \end{cases}$, vô nghiệm nốt.

Vậy nghiệm của hệ là $\boxed{(x;y) = (0;0)}$

Bài 91: ***Phân tích:*** Nhận xét phương trình thứ nhất của hệ chứa căn bậc hai của các hàm tạm gọi là *hàm đẳng cấp bậc hai* (hay hàm đồng bậc) đối với x, y (hàm số chỉ chứa x^2, y^2, xy mà không chứa hệ số tự do và x, y). Mà căn của một hàm bậc đẳng cấp hai ta coi như là hàm bậc nhất. Bên vế phải là hàm bậc nhất. Vậy hai vế của phương trình đồng bậc. Vì vậy ta áp dụng cách giải phương trình đồng bậc. Chưa thể chia ngay hai vế cho x (hay cho y) vì không biết x âm hay dương mà đưa vào dấu căn.Vì vậy ta bình phương với điều kiện $x + y \geq 0$, ta được:

$$\frac{5\left(x^2+y^2\right)}{6}+\frac{xy}{3}+2\sqrt{\frac{\left(x^2+y^2\right)\left(x^2+xy+y^2\right)}{6}}=x^2+y^2+2xy$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+10xy=12\sqrt{\frac{\left(x^2+y^2\right)\left(x^2+xy+y^2\right)}{6}} \quad (1)$$

Tiếp tục bình phương cũng được, thế trước hết nhưng ta nên đưa về một ẩn để dễ nhìn. Dễ thấy $x=0$ không thoả mãn hệ nên chia hai vế của (1) cho x^2 (x^2 có thể đưa vào dấu căn) ta được:

$$1+\left(\frac{y}{x}\right)^2+\frac{10y}{x}=\frac{12}{\sqrt{6}}.\sqrt{\left[1+\frac{y^2}{x^2}\right]\left[1+\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]}$$

Đặt $\frac{y}{x}=t$, thì phương trình trên trở thành:

$$1+t^2+10t=\frac{12}{\sqrt{6}}\sqrt{\left(1+t^2\right)\left(1+t+t^2\right)} \quad (*) \implies \left(1+t^2+10t\right)^2=24\left(1+t^2\right)\left(1+t+t^2\right)$$

$$\Leftrightarrow t^4+20t^3+102t^2+20t+1=24\left(1+t+2t^2+t^3+t^4\right)$$

$$\Leftrightarrow 23t^4+4t^3-54t^2+4t+23=0 \Leftrightarrow (t-1)^2\left(23t^2+50t+23\right)=0 \Leftrightarrow t=1 \ \vee \ t=\frac{-25\pm 4\sqrt{6}}{23}$$

Thử lại thấy chỉ $t=1$ thoả mãn phương trình (*). Với $t=1 \Rightarrow x=y$. Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được: $x\sqrt{2x^2+5x+3}=4x^2-5x-3$. Tiếp tục dùng biến đổi hệ quả:

$$\Rightarrow x^2\left(2x^2+5x+3\right)=\left(4x^2-5x-3\right)^2 \Leftrightarrow 2x^4+5x^3+3x^2=16x^4+25x^2+9-40x^3-24x^2+30x$$

$$\Leftrightarrow 14x^4-45x^3-2x^2+30x+9=0 \Leftrightarrow (x-3)(2x+1)\left(7x^2-5x-3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x=3 \ \vee \ x=\frac{-1}{2} \ \vee \ x=\frac{5\pm\sqrt{109}}{14}.$$

Thử lại thấy chỉ $x=3$ hệ ban đầu.

Vậy nghiệm của hệ là $\boxed{(x;y)=(3;3)}$

<u>*Cách giải khác:*</u> Với những người đã có phản xạ và phát hiện nhân tử chung nhanh thì ta thực hiện phép nhân liên hợp sau với *x* khác *y* :

$$\left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}-\frac{x+y}{2}\right)+\left(\sqrt{\frac{x^2+xy+y^2}{3}}-\frac{x+y}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{x^2+y^2}{2}-\frac{(x+y)^2}{4}}{\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}+\frac{x+y}{2}}+\frac{\frac{x^2+xy+y^2}{3}-\frac{(x+y)^2}{4}}{\sqrt{\frac{x^2+xy+y^2}{3}}+\frac{x+y}{2}}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-y)^2}{\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}+(x+y)}+\frac{(x-y)^2}{2\sqrt{3\left(x^2+xy+y^2\right)}+3(x+y)}=0$$

Với *x* khác *y* thì hai mẫu thức trên đều dương!

Một cách khác ngắn gọn hơn nhiều đó là dùng bất đẳng thức:

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \ge \frac{x+y}{2} \text{ và } \sqrt{\frac{x^2+xy+y^2}{3}} \ge \frac{x+y}{2}.$$

Hơn nữa, việc nhìn nhận phương trình đẳng cấp cũng khá quan trọng để tìm được lời giải nhanh và hay nhất. Ta thấy:

$$x\sqrt{2x^2+5x+3} = 4x^2-5x-3 \Leftrightarrow -6x^2+x.\sqrt{2x^2+5x+3}+2x^2+5x+3=0$$

Đây là một phương trình đẳng cấp rất dễ giải!

Bài 92: Điều kiện $x+y>0$. Với điều kiện này phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$$\left(x^2+y^2\right)(x+y)+2xy=(x+y) \Leftrightarrow \left(x^2+y^2\right)(x+y)-\left(x^2+y^2\right)+(x+y)^2-(x+y)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+y^2\right)(x+y-1)+(x+y)(x+y-1)=0 \Leftrightarrow (x+y-1)\left(x^2+y^2+x+y\right)=0$$

$\Leftrightarrow x+y=1$ (do $x+y>0$ nên $x^2+y^2+x+y>0$) (thỏa mãn)

Thay vào phương trình thứ hai ta được:

$$\sqrt{1}=x^2-(1-x) \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow x=1 \vee x=2$$

– Nếu $x=1 \Rightarrow y=1-x=0$

– Nếu $x=2 \Rightarrow y=-1$

Vậy nghiệm của hệ là $\boxed{(x;y)=(1;0),(2;-1)}$

Bài 93: Đặt $t=xy \Rightarrow \frac{1}{x}=\frac{y}{t}$. Lúc này hệ trở thành: $\begin{cases} t(5-3y+2t)=4+3y \\ \left(y+\frac{y}{t}\right)^2-5t+4=0 \quad (*) \end{cases}$

Cộng hai vế của hệ này lại ta được: $y^2.\left(1+\frac{1}{t}\right)^2-y(3t+3)+2t^2=0 \qquad (1)$

+) Nếu $t=-1$ thì (1) trở thành $2=0$, vô lí.

+) Nếu $t\ne-1$. Xem như đây là phương trình ẩn *y* tham số *t* có biệt thức:

$\Delta_y=9(t+1)^2-8t^2.\left(1+\frac{1}{t}\right)^2=(t+1)^2$ nên phương trình có nghiệm $y=\dfrac{(3t+3)\pm(t+1)}{2\left(1+\frac{1}{t}\right)^2}$

hay chính là $y=\frac{2t^2}{t+1}$ hoặc $y=\frac{t^2}{t+1}$.

(+) Nếu $y=\frac{2t^2}{t+1}$, thay vào $(*)$ ta được: $4t^2-5t+4=0$, vô nghiệm.

(+) Nếu $y=\frac{t^2}{t+1}$, thay vào $(*)$ ta được: $t^2-5t+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=xy=1 \Rightarrow y=\frac{1}{2} \Rightarrow x=2 \\ t=xy=4 \Rightarrow y=\frac{16}{5} \Rightarrow x=\frac{5}{4} \end{array}\right.$

Vậy nghiệm của hệ là $\boxed{(x,y)=\left(2;\frac{1}{2}\right),\left(\frac{5}{4};\frac{16}{5}\right)}$

Bài 94: Hệ đã cho viết lại thành $\begin{cases} x^2+y+xy\left(x^2+y\right)+xy=\dfrac{-5}{4} \\ \left(x^2+y\right)^2+xy=\dfrac{-5}{4} \end{cases}$

Đặt $u=x^2+y,\ v=xy$ thì hệ trên được trở thành:

$$\begin{cases} u+v+uv=\dfrac{-5}{4} \\ u^2+v=\dfrac{-5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2-u-uv=0 \\ u^2+v=\dfrac{-5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=0 \ \vee \ u=v+1 \\ u^2+v=\dfrac{-5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=0 \\ v=5 \end{cases} \vee \begin{cases} u=\dfrac{-1}{2} \\ v=\dfrac{-3}{2} \end{cases}$$

(*) Nếu $\begin{cases} u=0 \\ v=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y=0 \\ xy=\dfrac{-5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x^2 \\ x^3=\dfrac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt[3]{\dfrac{5}{4}} \\ y=-\sqrt[3]{\dfrac{25}{16}} \end{cases}$

(*) Nếu $\begin{cases} u=\dfrac{-1}{2} \\ v=\dfrac{-3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y=\dfrac{-1}{2} \\ xy=\dfrac{-3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{-1}{2}-x^2 \\ (x-1)\left(2x^2+2x+3\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\dfrac{-3}{2} \end{cases}$

Vậy nghiệm của hệ là $\boxed{(x;y)=\left(1;\dfrac{-3}{2}\right),\left(\sqrt[3]{\dfrac{5}{4}};\sqrt[3]{\dfrac{25}{16}}\right)}$

Bài 95: Đầu tiên tìm điều kiện xác định của hệ phương trình: $x-y\geq 9$.

Từ phương trình thứ nhất của hệ suy ra $\sqrt{x-y}\leq 3\Rightarrow x-y\leq 9$.

Vậy nên ta phải có $x-y=9$.

Thế $x-y=9\Leftrightarrow x=y+9$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được: $y+9+8y=0\Leftrightarrow y=-1$.

Nếu $y=-1\Rightarrow x=8$. Thử lại thấy nghiệm này thoả mãn hệ ban đầu.

Vậy nghiệm của hệ là $\boxed{(x;y)=(8;-1)}$

Bài 96: Phương trình thứ hai của hệ tương đương với:

$$xy\left(x^2+y^2\right)+2-\left(x^2+y^2\right)-2xy=0\Leftrightarrow\left(x^2+y^2\right)(xy-1)-2(xy-1)=0$$

$$\Leftrightarrow (xy-1)\left(x^2+y^2-2\right)=0\Leftrightarrow xy=1 \ \vee \ x^2+y^2=2$$

* Nếu $xy=1$, thay vào phương trình thứ nhất ta được:

$$5x^2y-4xy^2+3y^3-2xy(x+y)=0\Leftrightarrow y\left(5x^2-4xy+3y^2-2x^2-2xy\right)=0$$

$$\Leftrightarrow y\left(3x^2-6xy+3y^2\right)=0\Leftrightarrow 3y(x-y)^2=0\Leftrightarrow y=0 \ \vee \ x=y$$

(+) Thấy rằng $y=0$ không thỏa mãn $xy=1$.

(+) Nếu $x=y\Rightarrow xy=x^2=1\Leftrightarrow x=\pm 1$.

Thử hai nghiệm $(1;1)$, $(-1;-1)$ ta thấy đều thỏa mãn.

* Nếu $x^2+y^2=2$ $(*)$, ta thế vào số 2 ở phương trình thứ nhất được:

$$5x^2y-4xy^2+3y^3-\left(x^2+y^2\right)(x+y)=0\Leftrightarrow 2y^3-5xy^2+4x^2y-x^3=0$$

$\Leftrightarrow (2y-x)(y-x)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2y \;\vee\; x = y$ (đã xét)

Với $x = 2y$, thay vào $(*)$ ta được $5y^2 = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{\sqrt{10}}{5} \Rightarrow x = \dfrac{2\sqrt{10}}{5} \\ y = \dfrac{-2\sqrt{10}}{5} \Rightarrow x = \dfrac{-2\sqrt{10}}{5} \end{array}\right.$

Vậy hệ có 4 nghiệm $\boxed{(x;y) = (1;1),\ (-1;-1),\ \left(\dfrac{\sqrt{10}}{5}; \dfrac{2\sqrt{10}}{5}\right), \left(\dfrac{-\sqrt{10}}{5}; \dfrac{-2\sqrt{10}}{5}\right)}$

Bài 97: Điều kiện $x \ge y$.

Chuyển hệ về dạng sau: $\begin{cases} \sqrt{x-y} = 9 - |x+2y| \\ (x+2y)^2 - 2(x-y) = 41 \end{cases}$

Đến đây ta đặt $a = \sqrt{x-y}$, $b = |x+2y|$ $(a, b \ge 0)$ thì hệ trên trở thành:

$$\begin{cases} a = 9-b \\ b^2 - 2a^2 = 41 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 9-b \\ b^2 - 2(b^2 - 18b + 81) = 41 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 9-b \\ b^2 - 36b + 203 = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 7 \\ a = 2 \end{cases}$ (thỏa mãn) $\vee$ $\begin{cases} b = 29 \\ a = -20 < 0 \end{cases}$ (không thỏa mãn)

Với $\begin{cases} a = 2 \\ b = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x-y} = 2 \\ |x+2y| = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y+4 \\ |3y+4| = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 5 \end{cases} \vee \begin{cases} y = \dfrac{-11}{3} \\ x = \dfrac{1}{3} \end{cases}$

Vậy nghiệm của hệ là $\boxed{(x, y) = (5;1), \left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{-11}{3}\right)}$

Bài 98: Điều kiện $x \ge \dfrac{2}{3}$, $y \ge 0$, $x^2 + 4y - 3 \ge 0$.

Ta thấy rằng khó mà khai thác được nhân tử chung ở phương trình thứ hai mà chỉ có thể ở phương trình thứ nhất. Phương trình thứ nhất tương đương với:

$$\sqrt{x+y} - \sqrt{2y} = 2y^2 - xy - x^2 \Leftrightarrow \frac{x-y}{\sqrt{x+y}+\sqrt{2y}} = (2y+x)(y-x) \text{ (do } \sqrt{x+y}+\sqrt{2y} > 0)$$

$\Leftrightarrow (x-y)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+y}+\sqrt{2y}} + 2y + x\right) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (dễ thấy $\dfrac{1}{\sqrt{x+y}+\sqrt{2y}} + 2y + x > 0$).

Thay vào phương trình thứ hai ta được:

$$\sqrt{x^2+4x-3} + 1 = \sqrt{3x-2} + x \Leftrightarrow \sqrt{x^2+4x-3} = \sqrt{3x-2} + (x-1)$$

Đến đây ta đặt $u = \sqrt{3x-2}$, $v = x-1$ $\left(u \ge 0, v \ge \dfrac{-1}{3}\right)$ thì phương trình trên trở thành:

$$\sqrt{2u^2+v^2} = u+v \Leftrightarrow \begin{cases} u+v \ge 0 \\ 2u^2+v^2 = u^2+v^2+2uv \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v \ge 0 \\ u(u-2v) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v \ge 0 \\ u = 0 \;\vee\; u = 2v \end{cases}$$

(*) Nếu $u=0\Rightarrow x=\frac{2}{3}\Rightarrow v=\frac{-1}{3}$, không thỏa mãn $u+v\ge 0$, loại.

(*) Nếu $\begin{cases}u+v\ge 0\\ u=2v\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}v\ge 0\\ u^2=4v^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1\ge 0\\ 3x-2=4(x-1)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1\\ 4x^2-11x+6=0\end{cases}\Leftrightarrow x=2$

Vậy nghiệm của hệ là $\boxed{(x,y)=(2;2)}$

Bài 99: Viết lại hệ dưới dạng đẳng cấp: $\begin{cases}2x^2-xy+y^2=3y-x\\ x^2+xy-3y^2=x-2y\end{cases}$ (I)

Để thay đổi cách giải một chút, ta sẽ giải theo cách sau:

TH1: Nếu $x=0$, thay vào hệ (I) ta tìm được $y=0$.

TH2: Nếu $x\ne 0$, ta đặt $y=tx\ (t\in\mathbb{R})$, thay vào hệ (I) ta được:

$$(\text{II})\begin{cases}x^2(2-t+t^2)=x(3t-1)\\ x^2(1+t-3t^2)=x(1-2t)\end{cases}\Rightarrow(3t-1)(1+t-3t^2)=(1-2t)(2-t+t^2)\quad(*)$$

(dễ thấy $t=\frac{1}{3}$ không thỏa mãn hệ và $2-2t+t^2=(t-1)^2+1>0$ nên ta có thể nhân chéo)

$$(*)\Leftrightarrow -9t^3+6t^2+2t-1=-2t^3+3t^2-5t+2\Leftrightarrow 7t^3-3t^2-7t+3=0$$

$$\Leftrightarrow(t+1)(t-1)(7t-3)=0\Leftrightarrow t=1\vee t=-1\vee t=\frac{3}{7}.$$

(+) Nếu $t=1$, thay vào hệ (II) tìm được $x=1\Rightarrow y=1$.

(+) Nếu $t=-1$, thay vào hệ (II) tìm được $x=-1\Rightarrow y=1$.

(+) Nếu $t=\frac{3}{7}$, thay vào hệ tìm được $x=\frac{7}{43}\Rightarrow y=\frac{3}{43}$.

Vậy hệ có 4 nghiệm là $\boxed{(x,y)=(0;0),(1;1),(-1;-1),\left(\frac{7}{43};\frac{3}{43}\right)}$

Bài 100: Thấy rằng $x=0$ thì hai phương trình của hệ mâu thuẫn. Do đó $x\ne 0$.

Lúc này hệ tương đương với:

$$\begin{cases}y=1+\frac{7y}{x}+\frac{1}{x}\\ y^2=10\left(\frac{y}{x}\right)^2-\frac{1}{x^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y-\frac{1}{x}=1+\frac{7y}{x}\\ \left(y-\frac{1}{x}\right)^2=10\left(\frac{y}{x}\right)^2-\frac{2y}{x}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xy=x+7y+1\\ \left(1+\frac{7y}{x}\right)^2=10\left(\frac{y}{x}\right)^2-\frac{2y}{x}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}xy-x-7y-1=0\\ 39\left(\frac{y}{x}\right)^2+\frac{16y}{x}+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xy-x-7y-1=0\\ \frac{y}{x}=\frac{-1}{13}\ \vee\ \frac{y}{x}=\frac{-1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xy-x-7y-1=0\\ x=-13y\ \vee\ x=-3y\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=-13y\\ -13y^2+6y-1=0\ (\text{VN})\end{cases}\vee\begin{cases}x=-3y\\ -3y^2-4y-1=0\end{cases}\Leftrightarrow(x,y)=\left(1;\frac{-1}{3}\right),(3;-1)$$

Vậy hệ có hai nghiệm là $\boxed{(x,y)=\left(1;\frac{-1}{3}\right),(3;-1)}$